

Préface

Ce livret, élaboré par l'équipe de mathématiques du lycée Gaspard Monge de Savigny-sur-Orge, s'adresse aux élèves qui s'apprentent à entrer en classe de terminale spécialité mathématiques, il s'inspire de différents livrets provenant des lycées Le Castel, Henri-IV et Louis Bascan.

Il propose une sélection d'exercices couvrant une large partie du programme de première spécialité mathématiques et a pour but de faire le point sur les connaissances et les techniques utiles à une entrée en terminale.

Il n'est pas nécessaire de faire tous les exercices mais il paraît raisonnable de chercher au moins les plus faciles.

Les exercices présentent un pictogramme donnant une indication du niveau de difficulté. Les exercices ☆☆ et ☆☆☆ mobilisent des connaissances et savoir faire usuels de fin de première, les exercices ☆☆☆ ou ☆☆☆ sont plus difficiles. Ces mentions sont subjectives. Ne pas trouver un exercice, même en y passant du temps, ne préjuge en rien d'une future réussite en terminale.

Une solution non détaillée est proposée sur le site de l'établissement :

<https://lyc-monge-savigny.ac-versailles.fr/>

Parcours

Avant la rentrée en classe de terminale spécialité mathématiques, il est conseillé de faire quelques exercices de ce livret, pas nécessairement tous. Deux parcours sont proposés, le premier regroupe les exercices indispensables à maîtriser, le second en ajoute quelques-uns un peu plus difficiles.

• Parcours 1

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| – Exercice 1 | – Exercice 27 |
| – Exercice 3 | – Exercice 28 |
| – Exercice 4 | – Exercice 30 |
| – Exercice 8 | – Exercice 31 |
| – Exercice 10 | – Exercice 33 |
| – Exercice 11 | – Exercice 36 |
| – Exercice 13 | – Exercice 38 |
| – Exercice 14 | – Exercice 39 |
| – Exercice 18 | – Exercice 41 |
| – Exercice 19 : 1 et 2 | – Exercice 42 : 1, 2 et 3 |
| – Exercice 20 : 1 et 2 | – Exercice 43 : 1, 2 et 3 |
| – Exercice 21 | – Exercice 46 |
| – Exercice 23 | – Exercice 51 |

• Parcours 2

- Exercice 2
- Exercice 9
- Exercice 12
- Exercice 16
- Exercice 19 : 3
- Exercice 20 : 3
- Exercice 26
- Exercice 32
- Exercice 35
- Exercice 42 : 4, 5 et 6
- Exercice 44 : 1 et 2
- Exercice 49
- Exercice 50

EXERCICES

1 Équations et inéquations

Exercice 1 (☆☆ - Équations du 2nd degré). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- $2x^2 - 2x - 12 = 0$
- $-x^2 + x + 2 = 0$
- $-3x^2 + 7x + 1 = 0$
- $3x^2 + \sqrt{12}x + 1 = 0$
- $2x^2 + 12x + 18 = 0$
- $-4x + 2x^2 + 4 = 0$
- $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$
- $x(x + 4) + 8 = 0$
- $2(1 - 3u) = u^2 - 3(2u + 1)$

Exercice 2 (☆☆). Soit P la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

- Vérifier que 2 est une racine de P .
- On pose $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a, b et c .
- Résoudre $P(x) = 0$.

Exercice 3 (☆☆ - Équations quotients). Résoudre les équations suivantes.

- $\frac{1}{x-2} + x + 3 = 0$
- $\frac{3x-4}{x+1} = \frac{x-1}{2x+3}$
- $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2}$

Exercice 4 (☆☆ - Tableau de signes). Résoudre les inéquations suivantes.

- $-3x^2 + 4x + 1 \leq 0$
- $2x^2 + 8x > 4$
- $2x^2 - x + 1 \leq x^2 + 3x - 4$
- $\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} < 1$
- $\frac{x+1}{2x^2-5x-4} < 0$

Exercice 5 (☆☆ - Polynôme du 2nd degré).

- Déterminer le polynôme P de degré 2 tel que :

$$P(3) = 14 \quad \text{et} \quad P(1) = P\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

- Soient a, b et c trois réels distincts.

- Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que :

$$P(a) = b \quad \text{et} \quad P(b) = P(c) = 0$$

- Existe-t-il un polynôme P de degré 2 tel que :

$$P(a) = 1, \quad P(b) = 1 \quad \text{et} \quad P(c) = 1 \quad ?$$

Exercice 6 (☆☆ - Le prof préféré). Des élèves décident d'offrir un gros cadeau à leur professeur de maths préféré coûtant 600 € (c'est en effet un beau cadeau). S'il y avait 10 élèves de moins, chacun devrait payer 3 € de plus. Combien d'élèves participent à cette œuvre de charité?

Exercice 7 (☆☆ - Paramètre). Soit m un réel et (E_m) l'équation d'inconnue x :

$$(E_m) \quad 2x^2 + (3m + 1)x - m(m - 1) = 0$$

- Exprimer Δ_m , discriminant de (E_m) , en fonction de m .
- Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle au moins une solution?
- Exprimer P_m , produit des solutions de (E_m) , en fonction de m .
- Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles -2 est solution de (E_m) ?
Si oui, résoudre chacune des équations obtenues.

2 Fonction exponentielle

Exercice 8 (☆☆). Écrire l'expression donnée sous la forme $e^{u(x)}$ où $u(x)$ est une expression de la variable x .

- $e^{-x} \times e^3$
- $e^{2x} \times e^{-x}$
- $\frac{e^{3x}}{e^{2x}}$
- $e^{3x} \times (e^{-2x})^3$
- $e^{-4x} \times (e^{3x-2})^2$
- $e^{5x} \times \sqrt{e^{-8x}}$
- $\frac{e^{-2x} \times e^{3x-3}}{(e^{2x})^4 \times e}$
- $\frac{\sqrt{e^x} \times (e^{-2x+1})^{-3}}{e^{-2x+2} \times e^{4,5x}}$

Exercice 9 (☆☆). Simplifier les expressions suivantes.

- $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
- $(e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}(e^{3x} - e^{-x})$
- $(e^x - e^{-x})(e^{2x} + e^x + 1)$
- $(e^{3x})^2 + (e^{-3x})^2 - (e^{3x} - e^{-3x})^2$
- $(e^{3x})^2 - e^{2x}(e^{2x} + e^{-2x})^2$

Exercice 10 (☆☆). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

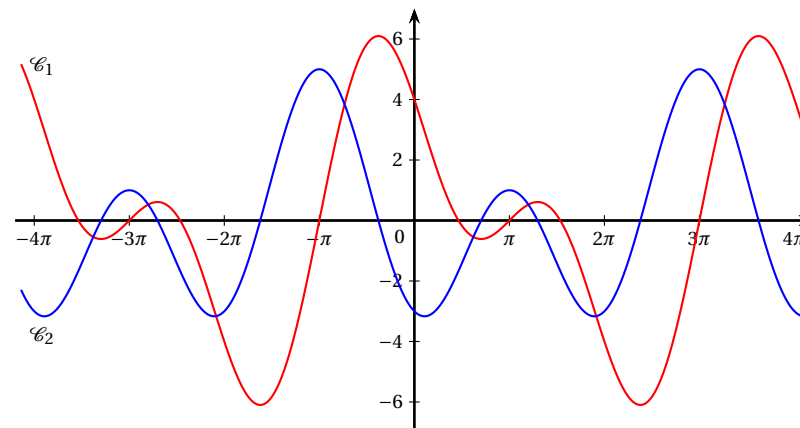
- $e^{\frac{x}{2}+1} = 1$
- $ee^{x-1} = e^{x^2}$
- $e^{3-x^2} = e$
- $e^x - e^{-x} = 0$
- $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$
- $e^{2x} < e^2$
- $2e^{-x} - 2 \geq 0$
- $e^{x^2-5x} \geq e^{-6}$
- $1 + e^{-2x} > 1$

3 Dérivation

Exercice 11 (☆☆). Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité puis déterminer sa dérivée.

- $f: x \mapsto 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$
- $f: x \mapsto x^2\sqrt{x}$
- $f: x \mapsto \frac{3}{x^2+1}$
- $f: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$
- $f: x \mapsto (x^2 - 3)^2$
- $f: x \mapsto -\frac{3}{x^2}$
- $f: x \mapsto \frac{x^2+x+1}{-2x+5}$
- $f: x \mapsto 3e^x + 5x^2 - \frac{1}{x}$
- $f: x \mapsto 3e^{2x+1}$
- $f: x \mapsto xe^x$
- $f: x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x-1}$
- $f: x \mapsto \frac{x^2e^x}{x^2+1}$

Exercice 12 (☆☆). On a tracé ci-dessous deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. L'une des deux représente une fonction f et l'autre sa fonction dérivée f' . Laquelle des deux représente la fonction f ? Justifier.



Exercice 13 (☆☆). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

- Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f , étudier son signe et dresser le tableau de variations de f en précisant les éventuels extrema.
- Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

Exercice 14 (☆☆ - Équation d'une tangente). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .
- Dresser la tableau de variations de f .
- Soit A le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A , puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A .
- Soit B le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B , puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ en B .

Exercice 15 (☆☆ - Tangentes et nombres dérivés). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 6x + 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Déterminer les points de la courbe en lesquels la tangente est horizontale.
- Déterminer les points de la courbe en lesquels la tangente est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

Exercice 16 (☆☆). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-x} + 2x - e^{-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .
- Dresser la tableau de variations de f .
- Déterminer une équation des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectivement 1 et 0.

Exercice 17 (☆☆ - Position relative). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 3 + \frac{2}{e^x + 1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .
- Dresser la tableau de variations de f .
- $\mathcal{C}_f$ admet-elle une tangente horizontale?
- Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d d'équation $y = x + 3$.

4 Suites

Exercice 18 (☆☆). Pour chacune des suites données ci-dessous, où $n \in \mathbb{N}$:

- $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- $\begin{cases} v_n = 5 - 2n \\ w_n = (n+1)^2 - n^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x_n = \frac{3^n}{n+1} \\ y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$

- Calculer les trois premiers termes.
- La suite est-elle géométrique? Arithmétique?
- Si elle est arithmétique ou géométrique calculer le terme de rang 100.

Exercice 19 (☆☆ - Suites arithmétiques). Dans chacun des cas ci-dessous, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- Sachant que $u_0 = \frac{3}{2}$ et $r = \frac{7}{6}$, calculer u_{10} et u_{20} .
- Sachant que $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$, calculer r , u_2 , u_5 et S_{10} .
- Sachant que $u_5 = 7$ et $u_{10} = -3$, calculer u_0 , u_1 et S_{20} .

Exercice 20 (☆☆ - Suites géométriques). Dans chacun des cas ci-dessous, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

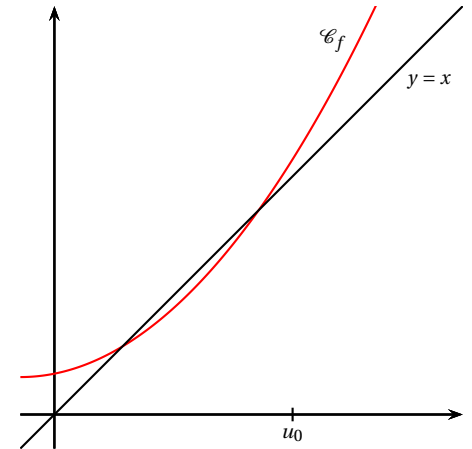
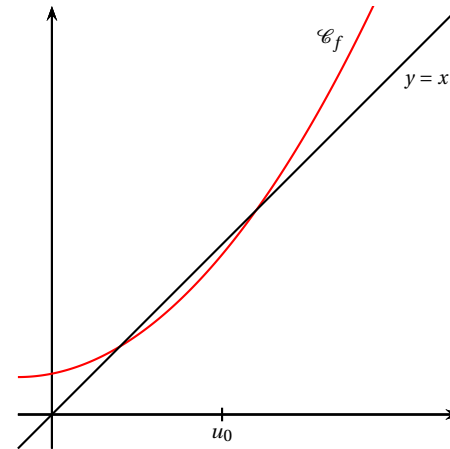
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- Sachant que $q = \frac{1}{3}$ et que $u_0 = 7$, calculer u_1 , u_2 , u_3 .
- Sachant que $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$, calculer q , u_2 , u_5 et S_7 .
- Sachant que $u_0 = 12$ et $u_2 = 3$, calculer u_1 et u_5 et S_9 .

Exercice 21 (☆☆ - Sens de variation). Étudier le sens de variation des suites suivantes.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \frac{2n^2}{3^n}$.

Exercice 22 (☆☆ - Représentation graphique d'une suite récurrente). Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. En vous appuyant sur la courbe représentative de la fonction f , la droite d'équation $y = x$ et la valeur de u_0 , placer u_1 , u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.



Exercice 23 (☆☆ - Suite arithmético-géométrique).

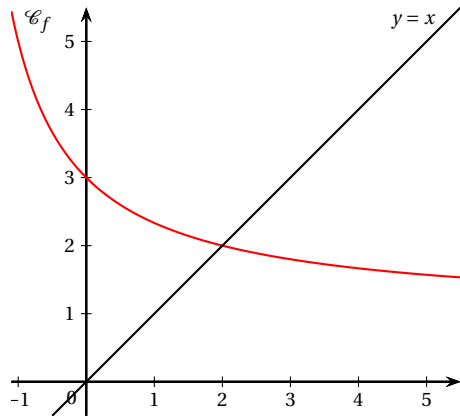
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- 1. Calculer u_1 et u_2 . Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 1$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- 3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 4. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Exprimer S_n et S'_n en fonction de n .

Exercice 24 (☆☆ - Suite homographique).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- 1. Soit f la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$. En vous appuyant sur la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$, représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



- 2. Calculer u_1 et u_2 . Vérifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 3. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison.
- 4. Exprimer v_n en fonction de n .
- 5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 25 (☆☆). Soit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} d_0 = 0 \\ d_{n+1} = \sqrt{(d_n)^2 + 2n + 3} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- 1. Calculer d_1 et d_2 .
- 2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (d_n)^2 - n^2$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 3. Exprimer u_n en fonction de n . En déduire l'expression de d_n en fonction de n .

Exercice 26 (☆☆ - Bac S - Centres étrangers - juin 2013).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{nu_{n+1}}{2(n+1)} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

- 1. Reproduire et compléter le script ci-contre écrit en langage Python pour obtenir la valeur de u_9 .
- 2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

```
1 n = 1
2 u = 1.5
3 while ... :
4     u = ...
5     n = ...
6 print(u)
```

- 3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 27 (☆☆ - Bourses d'excellence). Une fondation souhaite attribuer des bourses d'excellence à plusieurs étudiants, en commençant par celui qui reçoit la plus petite bourse jusqu'à celui qui reçoit la plus grande. Le premier étudiant reçoit une bourse de 100 euros; le deuxième étudiant reçoit le double de la bourse du premier, diminué de 40 euros; le troisième étudiant reçoit le double de la bourse du deuxième, diminué de 80 euros, et ainsi de suite. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n la bourse versée au $n^{\text{ème}}$ étudiant.

- 1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- 2. La fondation dispose d'un budget total de 4 000 euros pour cette opération. Voici une série d'instructions écrite en Python :

```
1 u = 100
2 S = u
3 n = 1
4 while S < 4000 :
5     u = 2*u - 40*n
6     S = S + u
7     n = n + 1
8 print(n-1)
```

Remplir le tableau suivant afin de déterminer l'affichage que va effectuer la machine.

u	100								
S	100								
n	1								

- 3. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5 Probabilités

Exercice 28 (☆☆). Le directeur d’une gare SNCF fait le bilan sur les 180 trains de la journée. Parmi eux, 24 trains sont arrivés avec plus de 10 minutes de retard et des contrôleurs ont trouvé des fraudeurs parmi 88 trains. D’autre part, il y a eu un total de 10 trains avec plus de 10 minutes de retard et contenant des fraudeurs.

On prend un train au hasard, parmi les 180 trains, et on note les évènements :

- R : « le train est en retard » ;
- F : « le train comportait des fraudeurs ».

Calculer $\mathbb{P}(\overline{R})$, $\mathbb{P}(\overline{F})$, $\mathbb{P}(\overline{R} \cap \overline{F})$ et $\mathbb{P}(R \cup F)$.

Exercice 29 (☆☆).

1. On considère deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{4}{7}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{2}{7}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{7}$. Calculer la probabilité de A , puis de $A \cap B$.
2. En déduire la valeur de $\mathbb{P}_A(B)$.

Exercice 30 (☆☆). Un centre de vacances pour adolescents propose deux activités : équitation et tir à l’arc. Les adolescents, au nombre de 300, peuvent s’inscrire à une, deux ou aucune activité(s) : 78 % choisissent de s’inscrire au tir à l’arc ; 60 % à l’équitation et, parmi ces derniers, 70 % se sont inscrits aux deux activités.

On choisit un adolescent au hasard et on note les évènements E : « l’adolescent fait de l’équitation » et T : « l’adolescent fait du tir à l’arc ».

1. Écrire, à l’aide des évènements E et T , les probabilités données dans l’énoncé.
2. Compléter le tableau d’effectif ci-dessous.

	E	$\overline{E}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			

3. On prend un adolescent au hasard, parmi ceux inscrits en équitation. Quelle est la probabilité que celui-ci ne soit pas inscrit au tir à l’arc ?
4. On prend un adolescent au hasard, parmi ceux qui ne sont pas inscrits en équitation. Quelle est la probabilité que celui-ci soit inscrit au tir à l’arc ?

Exercice 31 (☆☆ - Intention de vote). En prévision d’une élection entre deux candidats A et B , un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 48 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B . On suppose qu’il n’y a pas de vote nul ni de vote blanc. Compte tenu du profil des candidats, l’institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B , tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A .

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note A l’évènement : « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » et V l’évènement : « la personne interrogée dit la vérité ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. a. Déterminer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, déterminer la probabilité qu’elle affirme voter pour le candidat A . On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
3. Montrer que la probabilité que la personne choisie vote pour le candidat A est égale à 0,536.

Exercice 32 (☆☆ - Indépendance). Lorsqu’elle part travailler, Jeanne prend son parapluie une fois sur dix. Elle a remarqué que lorsqu’elle avait son parapluie, il pleuvait dans 80 % des cas, et, lorsqu’elle ne l’avait pas, il pleuvait dans 15 % des cas. Les évènements A : « Jeanne prend son parapluie » et B : « il pleut » sont-ils indépendants ?

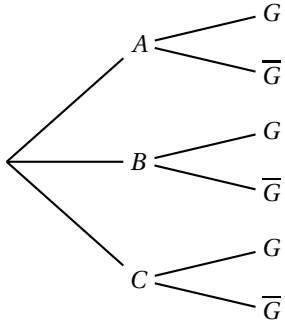
Exercice 33 (☆☆). Une tombola a été organisée lors de la fête du village, pour participer, il faut acheter un ticket parmi les 1 000 disponibles. Les tickets sont numérotés, et devant l’engouement populaire, tous ont été vendus en une seule journée, entre 8 heures et 18 heures, avec la répartition suivante :

- 155 ont été vendus avant 10 heures, dont 10 tickets gagnants ;
- 375 ont été vendus entre 10 heures et 14 heures, dont 42 tickets gagnants ;
- le reste des tickets a été vendu entre 14 heures et 18 heures, dont 47 tickets gagnants.

Le lendemain, l’organisateur veut savoir s’il y a un lien entre « avoir acheté un ticket gagnant » et l’heure de l’achat. Il choisit donc un numéro de ticket, au hasard, parmi les 1 000 existants, et il note les évènements suivants :

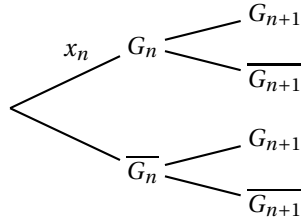
- G : « le ticket est un ticket gagnant » ;
- A : « le ticket a été acheté avant 10 heures » ;
- B : « le ticket a été acheté entre 10 heures et 14 heures » ;
- C : « le ticket a été acheté après 14 heures ».

1. Recopier et compléter l’arbre pondéré ci-contre.
2. Parmi les trois plages horaires de l’énoncé, durant laquelle est-il le plus probable d’acheter un ticket gagnant ?
3. Calculer $\mathbb{P}(A \cap G)$.
4. Les évènements A et G sont-ils indépendants ? Justifier.
5. Un participant a acheté un ticket gagnant. Quelle est la probabilité qu’il l’ait acheté avant 10 heures ?



Exercice 34 (☆☆). Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la suivante est 0,7. On considère, pour tout entier naturel n non nul, l'évènement G_n : « Juliette gagne la n -ème partie » et on note $x_n = \mathbb{P}(G_n)$.

- Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(G_1)$, $\mathbb{P}(\overline{G_1})$, $\mathbb{P}_{G_1}(G_2)$ et $\mathbb{P}_{\overline{G_1}}(G_2)$.
- Calculer $\mathbb{P}(G_2)$.
- Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



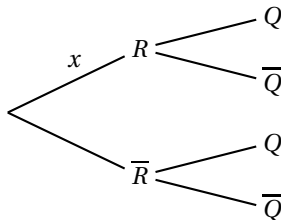
- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = 0,3x_n + 0,3$.
- On pose, pour tout entier naturel n non nul, $y_n = x_n - \frac{3}{7}$.
 - Démontrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 0,3 exprimer alors y_n en fonction de n .
 - En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n = \frac{1}{14} \times 0,3^{n-1} + \frac{3}{7}$.
 - Calculer x_5 , x_7 et x_{10} (on arrondira les résultats à 10^{-5}). Que peut-on conjecturer quant à la probabilité de gagner la prochaine partie, en ayant déjà joué un très grand nombre de parties?

Exercice 35 (☆☆ - Bac - Métropole sujet 2 - juin 2024). La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen. Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ». Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen. On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

- Préciser les valeurs des probabilités $\mathbb{P}(Q)$ et $\mathbb{P}_{\overline{R}}(\overline{Q})$.
- On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
 - Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.
 - Montrer que $x = 0,9$.
- L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen? Arrondir à 10^{-3} près.



Exercice 36 (☆☆ - Loi de probabilité). Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de passages à l'infirmierie dans un lycée dans une journée.

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,35	0,3	0,25	b

- Déterminer le réel b .
- Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux passages à l'infirmierie dans la journée.
- Calculer $\mathbb{E}(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 37 (☆☆ - Temps de trajet). Monsieur Laroue effectue en voiture le même trajet tous les jours. Sur sa route, il y a trois feux. Une étude statistique, portant sur le nombre X de feux rouges a permis d'établir les résultats suivants :

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

- Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
- Le trajet sans aucun arrêt dure 15 min et chaque feu rouge rallonge la durée du trajet de 2 min. Soit T la variable aléatoire qui donne la durée du trajet de Monsieur Laroue.
 - Quelle relation lie X et T ?
 - En déduire $\mathbb{E}(T)$ et $V(T)$.

6 Trigonométrie

Exercice 38 (☆☆). Compléter, sans calculatrice, le tableau suivant.

Angle en degré	0	30	45	60	90	180	270	360
Angle en radian								

Exercice 39 (☆☆ - Conversion). 1. Convertir chacun des angles ci-dessous en radian.

$$70^\circ \quad , \quad 145^\circ \quad , \quad 180^\circ \quad , \quad 270^\circ \quad , \quad 90^\circ$$

- Convertir chacun des angles ci-dessous en degré.

$$\frac{7\pi}{6} \quad , \quad \frac{5\pi}{12} \quad , \quad \frac{4\pi}{5} \quad , \quad \frac{17\pi}{12} \quad , \quad \frac{3\pi}{2}$$

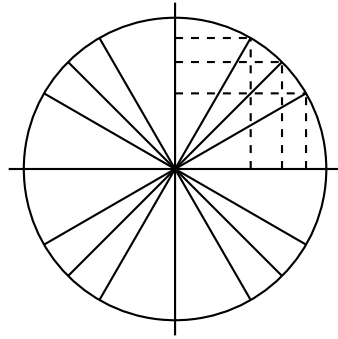
Exercice 40 (☆☆). Déterminer la mesure principale de chacune des mesures d'angles suivantes.

$$\begin{array}{llllll} \alpha = \frac{21\pi}{2} & \gamma = \frac{-43\pi}{2} & \varepsilon = \frac{69\pi}{4} & \theta = \frac{-527\pi}{2} & \nu = \frac{-215\pi}{6} & \psi = \frac{327\pi}{4} \\ \beta = \frac{11\pi}{3} & \delta = \frac{67\pi}{4} & \zeta = \frac{231\pi}{6} & \mu = \frac{314\pi}{3} & \phi = \frac{-95\pi}{4} & \omega = \frac{1233\pi}{2} \end{array}$$

Exercice 41 (☆☆ - Position sur le cercle trigonométrique).

Placer les points images des nombres, donnés en radian, sur le cercle trigonométrique ci-contre. Donner ensuite, sans calculatrice, la valeur du cosinus, et du sinus, de chacun des points.

$A\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$D\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$G\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$
$B\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$E\left(\frac{7\pi}{6}\right)$	$H\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
$C\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$I\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$



Exercice 42 (☆☆ - Équations trigonométriques). Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [0; 2\pi[$.

- $\cos(x) = \frac{1}{2}$
- $\cos(x) = -1$
- $\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

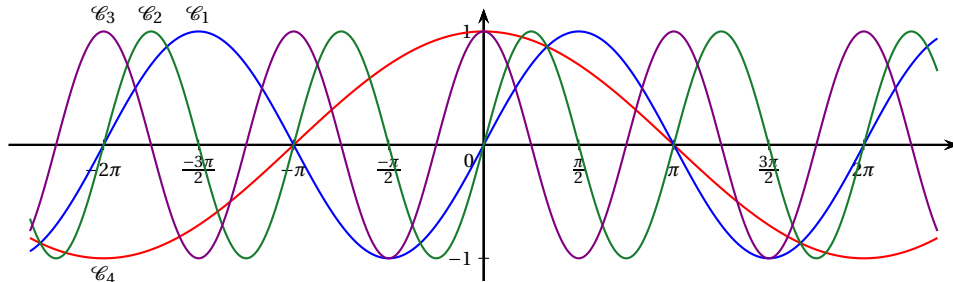
Exercice 43 (☆☆ - Inéquations trigonométriques).

- Résoudre, sur l'intervalle $[0; 2\pi[$, l'inéquation $\sin(x) > 0$.
- Résoudre, sur l'intervalle $[0; 2\pi[$, l'inéquation $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Résoudre, sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$, l'inéquation $0 \leq \cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Résoudre, sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$, l'inéquation $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 44 (☆☆).

- Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, tel que $\sin(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Déterminer la valeur de $\cos(x)$.
- Soit $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$, tel que $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{7}$. Déterminer la valeur de $\sin(x)$.
- Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, tel que $2(\cos(x))^2 + \sin(x) = 1$. Déterminer la valeur de x .

Exercice 45 (☆☆). Associer à chacune des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ tracées ci-dessous la fonction qui lui correspond parmi : $a : x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $b : x \mapsto \sin(x)$, $c : x \mapsto \sin(2x)$ et $d : x \mapsto \cos(2x)$.



7 Produit scalaire

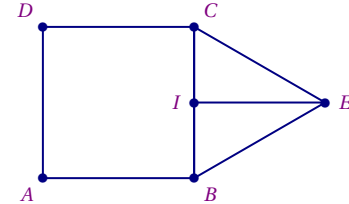
On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 46 (☆☆). On considère les points $A(4; -1)$, $B(-3; -1)$ et $C(-1; 3)$.

- Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- On appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . En calculant autrement le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, en déduire la longueur AH .
- Donner une valeur en degrés, arrondie à 0,1 près, de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 47 (☆☆ - Produits scalaires).

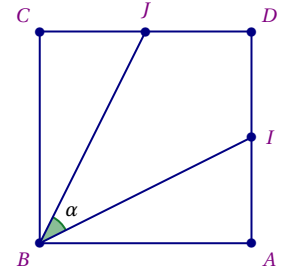
$ABCD$ est un carré de côté 8 cm, BEC est un triangle équilatéral extérieur au carré et I est le milieu du segment $[BC]$.



- Calculer les produits scalaires suivants :
 - $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$
 - $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$
 - $\vec{AB} \cdot \vec{DB}$
 - $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$
- Calculer également $\vec{BC} \cdot \vec{BE}$ et $\vec{CE} \cdot \vec{BC}$.
- On rappelle que la hauteur du triangle équilatéral BEC vaut $4\sqrt{3}$ cm. Calculer alors les produits scalaires suivants.
 - $\vec{AB} \cdot \vec{BE}$
 - $\vec{CE} \cdot \vec{CD}$
 - $\vec{BA} \cdot \vec{IE}$

Exercice 48 (☆☆). Soient $ABCD$ un carré de côté a , I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[DC]$. On note α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{IBJ}$.

- Calculer les longueurs BI et BJ .
- Montrer que $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = \frac{5}{4}a^2 \cos(\alpha)$.
- Exprimer les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
- En déduire une autre manière de calculer $\vec{BI} \cdot \vec{BJ}$ et déterminer α au degré près.



Exercice 49 (☆☆ - Droites perpendiculaires). On considère la droite d d'équation cartésienne $3x + y - 4 = 0$ et le point $B(2; -3)$.

- Donner un vecteur normal à la droite d .
- Déterminer une équation de la droite d' perpendiculaire à d passant par B .
- En déduire les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point B sur la droite d .

Exercice 50 (☆☆). On considère un triangle ABC avec $A(1; -3)$, $B(-2; 4)$ et $C(3; 0)$.

- Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .
- Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de A sur (BC) .
- Calculer la longueur AH .
- En déduire l'aire du triangle ABC .

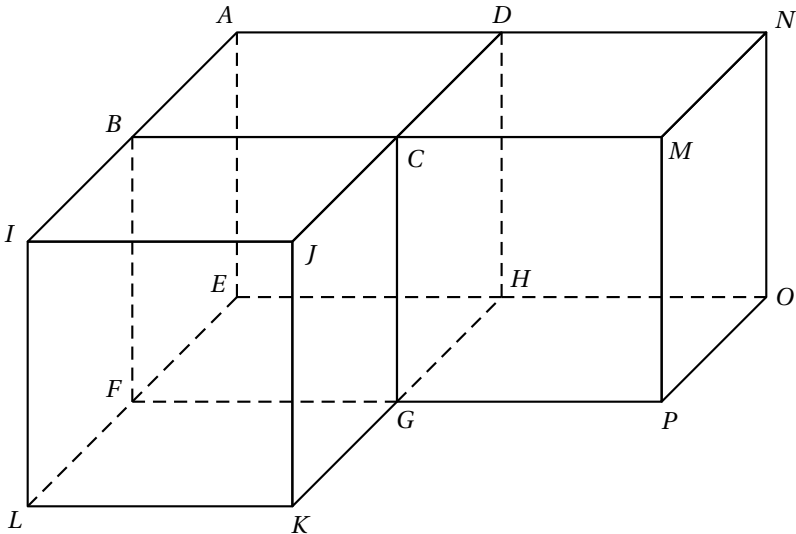
Exercice 51 (☆☆ - Équation de cercle). On considère l'ensemble E des points du plan vérifiant l'équation : $x^2 - 3x + y^2 + y - 2 = 0$.

1. Justifier que cet ensemble est une équation cartésienne d'un cercle. Préciser les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle.
2. Déterminer si les points $G(1; -2)$ et $N(3; -2)$ appartiennent à ce cercle.

Exercice 52 (★★ - Intersection cercle/droite). On considère les points $A(1;4)$, $B(5;1)$, $C(7;3)$ et $D(1;1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de d , la médiatrice de $[CD]$.
2. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.
3. Déterminer les éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}$ et d .

Exercice 53 (★★ - Repérage dans l'espace). La figure ci-dessous est constituée de trois cubes identiques.



1. Dans le plan (EHG) , on considère le repère orthonormé $(E; \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$.
Dans ce repère, le point E a pour coordonnées $(0;0)$ et le point P , par exemple, a pour coordonnées $(1;2)$ car $\overrightarrow{EP} = 1 \times \overrightarrow{EF} + 2 \times \overrightarrow{EH}$.
Donner les coordonnées des points F , K , G et O .
2. On munit maintenant l'espace du repère orthonormé $(E; \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$.
Dans ce repère, le point E a pour coordonnées $(0;0;0)$ et le point G , par exemple, a pour coordonnées $(1;1;0)$ car $\overrightarrow{EG} = 1 \times \overrightarrow{EF} + 1 \times \overrightarrow{EH} + 0 \times \overrightarrow{EA}$.
Donner les coordonnées de tous les autres points de la figure.
3. Soient Q et R les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[KP]$.
Déterminer les coordonnées des points Q et R .
4. Soient S et T les points tels que $\overrightarrow{ES} = \frac{1}{4} \overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AK}$.
Déterminer les coordonnées de S et T .