Réponses

Il est important de signaler que les solutions qui vont suivre ne sont généralement pas détaillées : les hypothèses des théorèmes ne sont pas toujours citées, les calculs ne sont pas détaillés, il n'y a pas forcément de phrases, etc. L'intérêt de cette correction réside dans le fait de pouvoir vérifier les résultats trouvés mais ne doit certainement pas empêcher le lecteur de chercher et rédiger proprement ses réponses.

Rédaction

La rédaction utilisée pour les réponses de ce livret est celle du programme de seconde. Elle ne diffère quasiment pas de celle de troisième, hormis l'apparition du symbole *équivalent* : $\iff$
Voici quelques explications pour comprendre ce symbole.

> **Définition (Proposition)**
>
> En LOGIQUE une **proposition** est un énoncé pouvant être soit vrai soit faux.
> Exemple : $\mathcal{Q}$: « Rome est la capitale de l'Italie » (énoncé vrai).
> $\mathcal{R}$: « 3 élevé au carré est égal à 33 » (énoncé faux).

Deux propositions A et B sont dites **équivalentes** quand il est possible de déduire B à partir de A et de déduire A à partir de B. On note : $A \iff B$.
En classe de seconde, le symbole équivalent est utilisé pour la résolution des équations :

Rédaction en troisième :

$$\begin{aligned} 3x+9&=0\\ 3x&=-9\\ x&=-3 \end{aligned}$$

Rédaction en seconde :

$$\begin{aligned} 3x+9=0 &\iff 3x=-9\\ &\iff x=-3 \end{aligned}$$

Attention! Il ne faut pas confondre le symbole équivalent $\iff$ qui se place entre deux propositions et le signe égal = qui se place entre deux expressions :

Une égalité :	$x=-3$	$\cancel{x \iff -3}$
Une équivalence :	$3x=-9 \iff x=-3$	$\cancel{3x=-9=x=-3}$

1 Calcul fractionnaire

Exercice 1 (★☆☆).

$A=\dfrac{19}{30}$ $\quad C=\dfrac{44}{45}$ $\quad E=-\dfrac{15}{14}$

$B=\dfrac{11}{20}$ $\quad D=\dfrac{1}{3}$ $\quad F=\dfrac{76}{195}$

Exercice 2 (★☆☆).

$A=\dfrac{3}{140}$ $\quad B=\dfrac{32}{35}$ $\quad C=\dfrac{1}{6}$ $\quad D=\dfrac{1}{16}$ $\quad E=\dfrac{1}{4}$

Exercice 3 (★☆☆).

$A=\dfrac{17}{4}$ $\quad B=-\dfrac{43}{12}$ $\quad C=\dfrac{33}{2}$ $\quad D=-\dfrac{1}{2}$ $\quad E=-\dfrac{1}{26}$

Exercice 4 (★☆☆).

1. $F=-29$ **2.** $F=3$ **3.** $F=-6$ **4.** $F=0$

Exercice 5 (★☆☆).

$A=\dfrac{29}{10}$ $\quad B=\dfrac{13}{11}$ $\quad C=\dfrac{9}{11}$

Exercice 6 (★☆☆). Soit x le nombre à ajouter ($x\neq -8$).

$$\begin{aligned} \frac{5+x}{8+x}=4 &\iff 5+x=4(8+x)\\ &\iff -27=3x\\ &\iff x=-9 \end{aligned}$$

Exercice 7 (★★☆). **1.** $\spadesuit = 5$ **2.** $\clubsuit = 9$

2 Puissances

Exercice 8 (★☆☆ - Formules). ∗ **Série 1**

$A=3^{14}$ $\quad C=3^{14}$ $\quad E=3^{2}$ $\quad G=3^{2}$

$B=3^{20}$ $\quad D=-3^{7}$ $\quad F=3^{29}$ $\quad H=3^{-3}$

∗ **Série 2**

$A=2^{-6}$ $\quad C=2^{3}$ $\quad E=5^{-4}$

$B=2^{-4}$ $\quad D=4^{-19}$ $\quad F=-7^{25}$

∗ **Série 3**

$A=2^{-6}\times 5^{-5}$ $\quad C=2^{-2}\times 5^{-1}$ $\quad E=2^{1}\times 5^{2}$

$B=2^{4}\times 5^{6}$ $\quad D=2^{10}\times 5^{-6}$ $\quad F=2^{11}\times 5^{-9}$

Exercice 9 (★★ - Nombre de chiffres). Ce nombre a 28 chiffres car :

$$4^{16} \times 5^{25} = 2^{32} \times 5^{25} = 2^{7} \times 2^{25} \times 5^{25} = 128 \times 10^{25}$$

Exercice 10 (★★ - Somme des chiffres). La somme des chiffres de $10^{2\,046} - 2\,046$ est :

$$9 \times (2046 - 4) + 7 + 9 + 5 + 4 = 18\,403$$

Exercice 11 (★☆). $4^{15} + 8^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2^{31}$.

Exercice 12 (★★). **1.** $n = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7$

2. $n = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

3. $\left(\dfrac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}\right)\left(\dfrac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}\right) = \dfrac{4 \times 4^5}{3 \times 3^5} \times \dfrac{6 \times 6^5}{2 \times 2^5} = 4^6 = 2^{12}$ donc $n = 12$.

4. $3^{2001} + 3^{2002} + 3^{2003} = n \times 3^{2001} \iff 3^{2001}\left(1 + 3 + 3^2\right) = n \times 3^{2001} \iff n = 13$

5. $8^n = 2^n \times 2^{12} \iff 2^{3n} = 2^{n+12} \iff 3n = n + 12 \iff n = 6$

Exercice 13 (★★ - Calculs algébriques). ∗ **Série 1**

$A = a^4 b^{-4}$ $\quad B = a^{-4} b^4$ $\quad C = a^8 b^2$ $\quad D = a^{-5} b^{-8}$

∗ **Série 2**

$A = a^{-1} b^3$ $\quad B = a^1 b^5$ $\quad C = a^{19} b^{28}$ $\quad D = a^{-2} b^{-14}$

3 Entiers

Exercice 14 (★★ - Chiffres manquants).

1. La somme des chiffres manquants est 3 ou 12, donc :

50 832, 51 822, 52 812, 53 802 et 53 892, 54 882, 55 872, 56 862, 57 852, 58 842, 59 832

2. Le chiffre des unités est pair et la somme des chiffres manquants est 1 ou 10, donc :

3 150 et 3 852, 3 654, 3 456, 3 258

3. Le chiffre des unités est 0 ou 5 et la somme des chiffres manquants est 2 ou 11, donc :

342 450 et 346 455

4. Divisible par 15 signifie divisible par 3 et par 5 donc le chiffre des unités est 0 ou 5 et la somme des chiffres manquants est 2, 5, 8, 11, 14 ou 17, donc :

1 230, 1 530, 1 830 et 1 035, 1 335, 1 635, 1 935

5. La somme des chiffres manquants est 1, 4, 7, 10, 13 ou 16 et la somme alternée des chiffres du nombre vaut 0, ce qui impose une différence de 2 entre le chiffre des unités et le chiffre des centaines de milliers, donc :

123 453, 423 456 et 723 459

Exercice 15 (★☆ - PGCD et PPCM).

1. $4\,116 = 2^2 \times 3 \times 7^3$ et $2\,156 = 2^2 \times 7^2 \times 11$.

2. $\text{PGCD}(4\,116; 2\,156) = 2^2 \times 7^2 = 196$ et $\text{PPCM}(4\,116; 2\,156) = 2^2 \times 3 \times 7^3 \times 11 = 45\,276$.

3. $4\,116 = 2^2 \times 3 \times 7^3$ a $3 \times 2 \times 4 = 24$ diviseurs.
$2\,156 = 2^2 \times 7^2 \times 11$ a $3 \times 3 \times 2 = 18$ diviseurs.

Exercice 16 (★☆ - Simplification de fraction).

$$A = \frac{71\,610}{20\,790} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 31}{2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11} = \frac{31}{9} \qquad C = \frac{2\,635}{1\,274} = \frac{5 \times 17 \times 31}{2 \times 7^2 \times 13} = \frac{2\,635}{1\,274}$$

$$B = \frac{374\,850}{350\,350} = \frac{2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 17}{2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13} = \frac{153}{143} \qquad D = \frac{4\,923\,765}{980\,980} = \frac{3^2 \times 5 \times 7^3 \times 11 \times 29}{2^2 \times 5 \times 7^3 \times 11 \times 13} = \frac{261}{52}$$

Exercice 17 (★★). $111\,111 = 111 \times 1\,001 = 3 \times 37 \times 11 \times 91 = 3 \times 37 \times 11 \times 7 \times 13 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$.

Exercice 18 (★★ - Nombre de zéros). On peut compter le nombre d'apparitions du chiffre 5 dans la décomposition en produit de facteurs premiers car il y a suffisamment de multiples de 2.

A se termine par 2 zéros (2 multiples de 5).

B se termine par 24 zéros (20 multiples de 5 et 4 multiples de 25).

C se termine par 224 zéros (180 multiples de 5, 36 multiples de 25, 7 multiples de 125 et 1 multiple de 625).

Exercice 19 (★☆ - Organigramme). En suivant les étapes :

∗ $437 + 32 \times 8 = 693$ qui est un multiple de 11.

∗ $693 - 3 = 690$ qui est un multiple de 3.

∗ $690 + 5 = 695$ qui est un multiple de 5.

La sortie est donc 695.

Exercice 20 (★☆ - Organigramme). **1.** Pour obtenir 39 il faut entrer 129, 133 ou 137.

2. Pour obtenir 24 il faut entrer 71, 79, 87, 95, 103, 111 ou 119.

4 Calcul littéral

Exercice 21 (★☆ - Distributivité simple). ∗ **Série 1**

$A = a^2 + 3a$ $\quad D = a^3 + a$ $\quad G = 7b^3 - 6b^2$

$B = x^3 + 4x$ $\quad E = 3a^2 + 6a$ $\quad H = 5x^3 + 2x^2$

$C = a^3 + a^2$ $\quad F = 3b^3 + 5b^2$ $\quad I = a^3 + 2a^2$

∗ **Série 2**

$A = 2x^3 + x^4$ $\quad C = 21a^6 + 14a^4$ $\quad E = 40x^3 - 45x^2$

$B = 3x^4 - 15x^2$ $\quad D = 3a^3 - 9a^4$ $\quad F = 15x^3 - 9x^2$

∗ **Série 3**

$A = 2x^3y^2 + 2x^2y$ $\quad D = 12a^4b - 8a^3b^2 - 4ab$

$B = 6a^3b^2 - 12a^3b^3$ $\quad E = 6x^4y + 2x^4$

$C = 5y^5 - 10x^2y^3 + 5y^2$ $\quad F = 2a^3b^2 - 3ab^2$

Exercice 22 (★☆☆ - Double distributivité). $\ast$ **Série 1**

$A = 21t^2 - 26t + 8$ $\quad$ $C = 6x^2 + 7x - 5$ $\quad$ $E = 2x^2 + 5xy - 3y^2$

$B = 8s^2 + 18s - 5$ $\quad$ $D = 14y^2 - 13y + 3$ $\quad$ $F = 4x^2 - xy + 5y^2$

$\ast$ **Série 2**

$A = 6x^4 - 7x^2 - 5$ $\quad$ $D = -16y^2x + 15y^4 - 15x^2$

$B = 2a^4b^2 + 5a^3b - 3a^2$ $\quad$ $E = -23x^3 + 10x^4 + 12x^2$

$C = 5a^2b^2 - 22ab^2 + 8b^2$ $\quad$ $F = 2x^3 + 8x^2y^2 + 5xy + 20y^3$

$\ast$ **Série 3**

$A = -21b^3 + 6a^3b^2 + 49ab - 14a^4$ $\quad$ $C = 15a^2b^4 - 11a^3b^3 - 12a^4b^2$

$B = -75a^2b^2c^2 + 90a^2b^2c - 24a^2b^2$ $\quad$ $D = -14a^2b^6 + 11a^4b^4 - 2a^6b^2$

Exercice 23 (★☆☆ - Identités remarquables). $\ast$ **Série 1**

$A = 49x^2 - 28xy + 4y^2$ $\quad$ $D = 49x^2 - 138xy + 144y^2$

$B = 16a^2 - 16ab + 4b^2$ $\quad$ $E = 4b^2 - 28bc + 49c^2$

$C = 9a^2 + 12ab + 4b^2$ $\quad$ $F = x^2 - 49y^2$

$\ast$ **Série 2**

$A = 9a^2 - 12ab + 4b^2$ $\quad$ $D = 9x^2 - z^2$

$B = 4 - 8b + 4b^2$ $\quad$ $E = 16a^2 - 56a + 49$

$C = 36a^2 + 12ab + b^2$ $\quad$ $F = 100a^2 - 140ab + 49b^2$

$\ast$ **Série 3**

$A = 4a^2 - 4ab^2 + b^4$ $\quad$ $D = 9a^4 - 12a^2b^3 + 4b^6$

$B = 4a^4 + 4a^2b + b^2$ $\quad$ $E = x^6 - y^6$

$C = 9x^4 - y^2$ $\quad$ $F = 9x^4 - 2x^3 + \frac{1}{9}x^2$

Exercice 24 (★★☆ - Identités enchaînées). $\ast$ **Série 1**

$A = x^4 - 2a^2x^2 + a^4$ $\quad$ $C = x^4 - 1$ $\quad$ $E = x^8 - 9x^4 + 8$

$B = 16a^4 - 1$ $\quad$ $D = x^8 - 256$ $\quad$ $F = 16a^8 + 8a^4 - 3$

$\ast$ **Série 2**

$A = -x^4 + x^2 - 2x + 1$ $\quad$ $C = x^2 - y^2 + 2y - 1$

$B = -x^4 - 3x^2 - 4$ $\quad$ $D = b^4 + a^2b^2 + a^4$

Exercice 25 (★★☆). D'une part,

$$a^2 = \frac{y^2}{z^2} + 2 + \frac{z^2}{y^2} \quad , \quad b^2 = \frac{z^2}{x^2} + 2 + \frac{x^2}{z^2} \quad , \quad c^2 = \frac{x^2}{y^2} + 2 + \frac{y^2}{x^2}$$

et d'autre part,

$$abc = \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2$$

Conclusion : $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$.

Exercice 26 (★★☆). Sachant que $X + Y = 1$ et $X^2 + Y^2 = 2$.

1. Comme $\quad 1^2 = (X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2 = 2 + 2XY \quad$ alors $\quad XY = -\frac{1}{2}$.
2. $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{X+Y}{XY} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$.
3. $X^3 + Y^3 = (X+Y)\left(X^2 - XY + Y^2\right) = 1 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$.
4. Comme $\quad 2^2 = \left(X^2 + Y^2\right)^2 = X^4 + 2X^2Y^2 + Y^4 = X^4 + Y^4 + 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \quad$ alors $\quad X^4 + Y^4 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Exercice 27 (★☆☆ - Facteurs communs).

$A = (x-2)(x+6)$ $\quad$ $D = x(3x-16)$ $\quad$ $G = (2x-3)(-3x-3)$

$B = (x+5)(2x-3)$ $\quad$ $E = (2x-1)^2(11x-3)$ $\quad$ $H = -(2x+5)^2$

$C = (x-3)(-x-2)$ $\quad$ $F = x^2(4x-2)$ $\quad$ $I = (x-5)(x+21)$

Exercice 28 (★☆☆ - Identités remarquables). $\ast$ **Série 1**

$A = (4-5x)(4+5x)$ $\quad$ $D = (3x+2)(3x-4)$ $\quad$ $G = (4x-1)$

$B = (x+6)(x+8)$ $\quad$ $E = (x+5)^2$ $\quad$ $H = (2x-5)^2$

$C = (5-2x)(11+2x)$ $\quad$ $F = (1-6x)^2$

$\ast$ **Série 2**

$A = (x+5)(3x-5)$ $\quad$ $C = (2x+9)^2$ $\quad$ $E = (3x+2)(2x+4)$

$B = \frac{1}{4}(x+2)^2$ $\quad$ $D = 9(x+3)(x-1)$ $\quad$ $F = \left(\frac{1}{3} - 2x\right)(1+2x)$

$\ast$ **Série 3**

$A = (x-3)(3x+8)$ $\quad$ $B = (4x-1)(9x+1)$ $\quad$ $C = (x-5)(x+6)$ $\quad$ $D = (2x+1)(7x-2)$

Exercice 29 (★★☆ - Regroupements de termes). $\ast$ **Série 1**

$A = (a+b)(x+y)$ $\quad$ $C = (d+c)(a-b)$ $\quad$ $E = (c+3d)(a-2b)$

$B = (b+c)(a+d)$ $\quad$ $D = (7y-1)(3x-4)$ $\quad$ $F = (5a-b)(x-y)$

$\ast$ **Série 2**

$A = (x+4)\left(x^2+1\right)$ $\quad$ $C = (5x+1)\left(x^2+1\right)$ $\quad$ $E = (x+1)\left(x^2+1\right)$

$B = (3x-1)\left(x^2+2\right)$ $\quad$ $D = (2x+1)\left(9x^2+1\right)$ $\quad$ $F = (x+1)\left(x^4+1\right)$

Exercice 30 (★★☆). Notons a, b, c, d, e et f les entiers naturels non nuls inscrits sur les faces du cube. Les nombres sur les sommets du cube sont : abc, abe, acd, ade, fbc, fbe, fcd, fde et vérifient :

$$\begin{aligned} abc + abe + acd + ade + fbc + fbe + fcd + fde = 105 &\iff a(bc + be + cd + de) \\ &\quad + f(bc + be + cd + de) = 105 \\ &\iff (a+f)(bc + be + cd + de) = 105 \\ &\iff (a+f)\big(b(c+e) + d(c+e)\big) = 105 \\ &\iff (a+f)(b+d)(c+e) = 3 \times 5 \times 7 \end{aligned}$$

Or, les nombres sont des entiers naturels non nuls donc chaque somme $a+f$, $b+d$ et $c+e$ est strictement supérieure à 1, ainsi :

$$(a+f) + (b+d) + (c+e) = 3 + 5 + 7 = 15$$

Exercice 31 (★★ - En facteurs premiers).

$A = 24\,999\,999 = 25\,000\,000 - 1 = (5000-1)(5000+1) = 4999 \times 5001 = 4999 \times 3 \times 1667$.
Il reste à montrer que 4 999 et 1 667 sont premiers.

$B = 1\,018\,081 = 10^6 + 18 \times 10^3 + 81 = \left(10^3+9\right)^2 = 1\,009^2$.
Il reste à montrer que 1 009 est premier.

5 Équations

Exercice 32 (★☆).

1. $x = \dfrac{3}{2}$
2. $x = \dfrac{1}{2}$
3. $x = 0$
4. $x = -\dfrac{1}{2}$
5. $x = -\dfrac{7}{2}$
6. $x = 2$

Exercice 33 (★★).

1. $x = -\dfrac{1}{4}$
2. $x = \dfrac{3}{2}$
3. $x = \dfrac{4}{3}$
4. $x = -1$
5. $x = -5$
6. $x = -18$
7. $x = -1$
8. $x = -\dfrac{4}{3}$

Exercice 34 (★☆ - Problèmes géométriques).

1. $\mathscr{A} = \frac{(b_1+b_2)h}{2} \iff 85{,}5 = \frac{(b_1+15)\times 4{,}5}{2} \iff b_1 = 23$ donc l'autre base mesure 23 cm.
2. $\mathscr{P} = 2(L+\ell) \iff 240 = 2(2\ell+26) \iff \ell = 47$ la largeur du rectangle mesure 47 m.
3. Notons c la longueur d'un côté. Théorème de Pythagore :

$$6^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = c^2 \iff c^2 = 48$$
$$\iff c = 4\sqrt{3} \quad \text{car } c > 0$$

Conclusion : Le côté de ce triangle mesure $4\sqrt{3}$ cm.

4. Notons x la longueur du rectangle. $15x = (15+6)\times(x-14) \iff x = 49$ la longueur du rectangle mesure 49 m.
5. Notons x la longueur de la petite diagonale. Aire du losange $\mathscr{A} = \frac{(x+7)x}{2}$. Aire du nouveau losange $\mathscr{A}' = \frac{(x-2)(x+5)}{2}$. Mise en équation et résolution :

$$\mathscr{A}' = \mathscr{A} - 82 \iff \frac{(x-2)(x+5)}{2} = \frac{(x+7)x}{2} - 82$$
$$\iff x = \frac{77}{2}$$

Conclusion : La petite diagonale mesure $\frac{77}{2}$ cm et la grande diagonale $\frac{77}{2} + 7 = \frac{91}{2}$ cm.

Exercice 35 (★☆ - Problèmes d'âge).

1. Notons x l'âge du fils, le père a $4x$ ans. Dans 20 ans, le fils aura $x+20$ ans et le père $4x+20$.
Mise en équation et résolution : $4x+20 = 2(x+20) \iff x = 10$ le fils a 10 ans et le père 40.
2. Notons x l'âge de Joe, aussitôt, Bob a $2x$ ans. Il y a 10 ans, Joe avait $x-10$ ans et Bob $2x-10$.
Mise en équation et résolution : $2x-10 = 4(x-10) \iff x = 15$ Joe a 15 ans et Bob 30.
3. Notons x l'âge du fils (actuel), le père a $x+25$. Dans 14 ans, le fils aura $x+14$ ans et le père $x+39$.
Mise en équation et résolution : $x+14 = \frac{3}{4}(x+39) \iff x = 61$ le fils a 61 ans et le père 86.

Exercice 36 (★☆ - Brevet 2003). **1.** $A = 15x^2 + 23x - 28$.

2. $9x^2 - 49 = (3x-7)(3x+7)$ d'où $A = (3x+7)(5x-4)$.
3. $x = -\frac{7}{3}$ ou $x = \frac{4}{5}$.

Exercice 37 (★☆ - Brevet 1998). **1.** $E = 8x^2 + 14x + 3$.

2. $E = (4x+1)(2x+3)$.
3. $x = -\frac{1}{4}$ ou $x = -\frac{3}{2}$.

Exercice 38 (★★ - Bambou brisé). Notons x la hauteur cherchée en cm.
Le triangle formé est rectangle donc d'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + 30^2 = (100-x)^2 \iff x^2 + 900 = 10\,000 - 200x + x^2$$
$$\iff 200x = 9\,100$$
$$\iff x = 45{,}5$$

Conclusion : Le bambou a été brisé à 45, 5 cm.

Exercice 39 (★★ - Le lièvre et la tortue). Le lièvre, allant 5 fois plus vite que la tortue, a parcouru 25 km tandis qu'elle en parcourait 5.
Notons x la distance cherchée en km, x est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit est 5 et l'autre $25-x$ donc d'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 = 5^2 + (25-x)^2 \iff 50x = 5^2 + 25^2$$
$$\iff x = 13$$

Conclusion : Le point où le lièvre a changé de direction se trouve à 13 km de l'arrivée.

Exercice 40 (★★ - Les chariots). Notons x la longueur en m, de l'arrière d'un chariot (partie qui dépasse d'un chariot rangé dans un autre) et y celle de l'avant (partie encastrée dans le chariot précédent). Mise en équation et résolution :

$$\begin{cases} 10x + y = 2{,}9 \\ 20x + y = 4{,}9 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x = 2 & L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 10x + y = 2{,}9 & L_2 \leftarrow L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 0{,}2 \\ y = 0{,}9 \end{cases}$$

Conclusion : La longueur d'un chariot est $x + y = 1{,}1$ m.

Exercice 41 (★☆☆ - Équation $x^2 = a$). $\ast$ **Série 1**

1. pas de solution
2. $x = -3$ ou $x = 3$
3. $x = 0$
4. $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

$\ast$ **Série 2**

1. $x = -4$ ou $x = 10$
2. $x = -6$ ou $x = -1$
3. $x = -5$ ou $x = 5$

6 Géométrie

Exercice 42 (★☆☆).

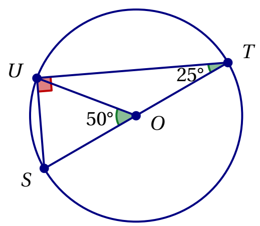
1. $AH = 6{,}4$ cm et $\mathscr{A}_{ABC} = 30{,}72$ cm².
2. $\frac{CK \times AB}{2} = \mathscr{A}_{ABC} \iff 4CK = 30{,}72 \iff CK = 7{,}68$ donc $CK = 7{,}68$ cm et $BK = 5{,}76$ cm.

Exercice 43 (★☆☆ - Brevet 1998).

1. D'une part, $AB^2 + AC^2 = 49$ et d'autre part $BC^2 = 49$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.
2. $\mathscr{A}_{ABC} = 11{,}76$ cm².
3. **a.** $\mathscr{A}_{ABC} = \frac{abc}{4R} \iff R = \frac{abc}{4\mathscr{A}_{ABC}} = 3{,}5$ le rayon du cercle circonscrit à ABC est 3,5 cm.
   b. Oui car le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.

Exercice 44 (★☆☆ - Brevet 2006).

1. Voir ci-contre pour la figure.
2. Comme U appartient au cercle de diamètre $[ST]$ alors le triangle STU est rectangle en U.
3. Dans le triangle STU rectangle en U : $\sin\widehat{STU} = \frac{SU}{ST} = \frac{3}{7}$ donc $\widehat{STU} \simeq 25°$.
4. Dans le cercle de diamètre $[ST]$, $\widehat{STU}$ est un angle inscrit et $\widehat{SOU}$ son angle au centre associé donc d'après le théorème de l'angle au centre $\widehat{SOU} = 2\widehat{STU} \simeq 50°$.

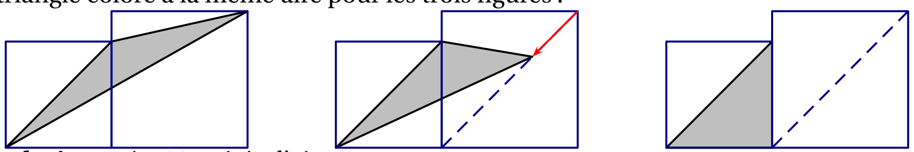


Exercice 45 (★☆☆ - Avec des losanges).

1. $\mathscr{A} = 240$ unités d'aire.
2. Soit O le centre du cercle. $OA = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ et $\mathscr{A} = 72\pi - 36\sqrt{2}$ unités d'aire.

Exercice 46 (★☆☆ - Avec des carrés). Plusieurs méthodes :

- Calculatoire : $\mathscr{A} = 14^2 + 18^2 - \left(\frac{14\times14}{2} + \frac{18\times32}{2} + \frac{4\times18}{2}\right) = 98$ unités d'aire.
- Astucieuse : L'aire d'un triangle ne change pas quand on déplace un sommet parallèlement au côté opposé (la base et la hauteur restent inchangées). En déplaçant le sommet du grand carré sur sa diagonale, on obtient un triangle dont l'aire est la moitié de celle du petit carré. Le triangle coloré a la même aire pour les trois figures :



Conclusion : $\mathscr{A} = 98$ unités d'aire.

Exercice 47 (★★☆ - Calcul de périmètre).

1. $AD = \frac{15}{\sin(65°)}$, $AC = \frac{15}{\cos(15°)}$, $BC = 15\tan(15°)$ et $BD = 15\tan(25°)$.
   Conclusion : $\mathscr{P}_{ACD} = AD + AC + BD - BC \simeq 35{,}06$ cm.
2. $AB = 10\sin(60°)$, $AC = \frac{AB}{\cos(10°)} = 10\frac{\sin(60°)}{\cos(10°)}$, $BC = AB\tan(10°) = 10\sin(60°)\tan(10°)$ et $BD = 10\cos(60°)$.
   Conclusion : $\mathscr{P}_{ACD} = AD + AC + BD - BC \simeq 22{,}27$ cm.

Exercice 48 (★★☆ - Appui sur un mur). **1.** $d = 70$ cm.

2. $d = 50(\cos(65°) + \sin(65°)) \simeq 66{,}45$ cm.

Exercice 49 (★★☆ - Jeu). $\sin\varphi = \frac{7}{25}$ donc $\varphi \simeq 16{,}26°$.

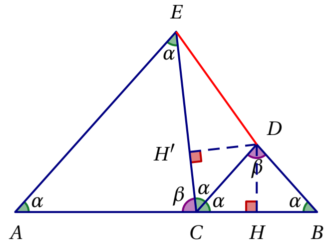
Exercice 50 (★★☆ - Lunules d'Hippocrate). L'aire des zones entre les lunules et le triangle est l'aire du demi-disque de diamètre a privée de l'aire du triangle ABC : $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{bc}{2}$.
L'aire des lunules est la somme de l'aire des demi-disques de diamètres b et c privée de l'aire des zones précédentes : $\mathscr{A}_{\text{Lunules}} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{bc}{2}\right]$.
Or ABC est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\mathscr{A}_{\text{Lunules}} = \pi\frac{b^2}{8} + \pi\frac{c^2}{8} - \pi\frac{a^2}{8} + \frac{bc}{2} = \frac{bc}{2} = \mathscr{A}_{ABC}$$

Exercice 51 (★★☆ - Corde tangente). Notons R est le rayon du grand cercle et r celui du petit. D'après le théorème Pythagore : $R^2 - r^2 = 12^2$.
Conclusion : $\mathscr{A} = \pi R^2 - \pi r^2 = 144\pi$ cm².

Exercice 52 (★★★).

Les triangles ACE et BCD sont isocèles et semblables donc ont les mêmes angles, notons-les α pour les petits et β pour le grand, aussitôt $2\alpha + \beta = 180°$ et on en déduit que $\widehat{DCE} = \alpha$.
On place ensuite H (resp. H') le pied de la hauteur issue de D dans le triangle BCD (resp. CDE). Les triangles CDH et CDH' sont semblables et de même taille car $\widehat{CHD} = \widehat{CH'D}$, $\widehat{DCH} = \alpha = \widehat{DCH'}$ et ont le segment $[CD]$ en commun.

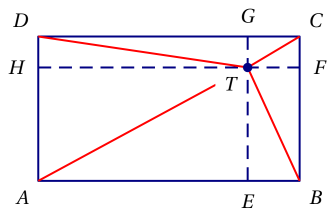


$CH' = CH = 2$, $DH' = DH = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ (théorème de Pythagore), $EH' = 6 - 2 = 4$.
DEH' est rectangle en H', d'après le théorème de Pythagore :

$$DE^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 4^2 \iff DE^2 = 21$$
$$\iff DE = \sqrt{21} \quad \text{car } DH > 0$$

Exercice 53 (★★☆ - La carte au trésor).
Supposons que le terrain où se trouve le trésor soit représenté par le rectangle $ABCD$. Le trésor T est placé à un endroit où :

$$TA = 1\,260, \quad TC = 320 \quad \text{et} \quad TD = 1\,120$$



On trace la parallèle à (AB) passant par T et la parallèle à (AD) passant par T. On construit ainsi les points E, F, G et H sur les quatre côtés du rectangle $ABCD$.

D'après le théorème de Pythagore, appliqué à trois reprises : $\begin{cases} 1260^2 = TH^2 + TE^2 \\ 320^2 = TF^2 + TG^2 \\ 1120^2 = TH^2 + TG^2 \end{cases}$.

Avec $L_1 + L_2 - L_3$ et le théorème de Pythagore : $TB^2 = TE^2 + TF^2 = 1260^2 + 320^2 - 1120^2$ et donc $TB = 660$ m.

Exercice 54 (★☆☆ - Ombre)**.** D'après le théorème de Thalès : $\frac{2}{6} = \frac{x}{x+10} \iff x = 5$ la longueur de son ombre est $x = 5$ m.

✍ **Remarque :** Pour les exercices 55 et 56, « Pythagore » (resp. « Thalès ») = d'après le théorème de Pythagore (resp. de Thalès).

Exercice 55 (★★☆)**.**

1. (Pythagore) $DF = 18$. (Thalès) $CH = 40$ donc $FH = 16$. (Thalès) $AH = 30$. (Pythagore) $FE = 7$ donc $DE = 25$. (Thalès) $CB = \frac{125}{3}$. (Pythagore) $HB = \frac{35}{3}$.
2. (Pythagore) $CF = 8$, (Thalès) $CH = 12$ donc $FH = 4$. (Pythagore) $HB = 5$. (Thalès) $FE = \frac{10}{3}$. (Thalès) $CE = \frac{26}{3}$.
3. (Pythagore) $CA = 5$, (Thalès) $CF = \frac{8}{5}$ donc $FH = \frac{12}{5}$. (Thalès) $DF = \frac{6}{5}$.

Exercice 56 (★★☆)**.**

1. (Thalès) $DE = 9$, (Thalès papillon) $BF = 8$.
2. Posons $x = AD$. (Thalès papillon) : $\frac{DE}{BC} = \frac{3}{4}$, (Thalès) : $\frac{x}{x+5} = \frac{DE}{BC}$.
   On en déduit que $\frac{x}{x+5} = \frac{3}{4} \iff 3(x+5) = 4x \iff x = 15$ et donc $AD = 15$.
3. Posons $x = AE$. (Thalès papillon) : $\frac{DE}{BC} = \frac{4}{6}$, (Thalès) : $\frac{x}{x+5} = \frac{DE}{BC}$.
   On en déduit que $\frac{x}{x+5} = \frac{4}{6} \iff 4(x+5) = 6x \iff x = 10$ et donc $AE = 10$.

Exercice 57 (★☆☆ - Parallèles ?)**.** **1.** (AJ) et (VI) ne sont pas parallèles.

2. (LK) et (ZH) ne sont pas parallèles.
3. (OX) et (VS) sont parallèles.
4. (AK) et (BG) sont parallèles.

Exercice 58 (★★☆ - Le rayon laser)**.**
$(LB) /\!/ (CD)$ car les angles alternes-internes sont égaux, de même $(EF) /\!/ (GH)$.
Le triangle LBC est isocèle en B donc $\widehat{BLC} = 22{,}5°$ et $\tan\left(\widehat{BLF}\right) = \frac{2{,}1}{5}$ donc $\widehat{BLF} \simeq 22{,}78°$.
De même, le triangle HGF est isocèle en G donc $\widehat{GHF} = 22{,}5°$ et $\widehat{GHC} \simeq 22{,}78°$.
Conclusion : $LFHC$ est un parallélogramme donc le segment $[LH]$ est à l'intérieur du labyrinthe et Louis peut toucher Henri.

Exercice 59 (★★☆ - Agrandissement)**.** Il faut multiplier par 16 l'aire du petit disque pour obtenir l'aire du grand disque.

7 Fonctions

Exercice 60 (★☆☆ - Brevet 2017)**.**

1. On obtient successivement : $4 \to 4+1 = 5 \to 5^2 = 25 \to 25 - 4^2 = 25 - 16 = 9$.
2. On obtient successivement : $x \to x+1 \to (x+1)^2 \to (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$.
3. **a.** L'image de 0 par f est $f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$.
   b. $f(x) = 5 \iff 2x + 1 = 5 \iff x = 2$. L'antécédent de 5 par f est 2.

Exercice 61 (★☆☆ - Brevet 2007)**.**

1. T est un point du cercle de diamètre $[RM]$ donc RMT est un triangle rectangle.
2. D'après le théorème de Pythagore : $TM^2 = RM^2 - RT^2 = 100 - 36 = 64$ donc $TM = 8$.
3. D'après le théorème de Thalès : $RH = \frac{5}{3}x$ et $SH = \frac{4}{3}x$.
4. $\mathscr{P}_{RSH} = x + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}x = 4x$.
5. $\mathscr{P}_{STMH} = (6 - x) + 8 + \left(10 - \frac{5}{3}x\right) + \frac{4}{3}x = 24 - \frac{4}{3}x$.
6. **a.** $f(0) = 0$, $f(6) = 24$, $g(0) = 24$ et $g(6) = 16$.
   b.
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 4x = 24 - \tfrac{4}{3}x \\ &\iff \tfrac{16}{3}x = 24 \\ &\iff x = 24 \times \tfrac{3}{16} \\ &\iff x = \tfrac{9}{2} \end{aligned}$$

Exercice 62 (★☆☆ - Brevet 1997)**.** **Partie A**

1. **a.** x peut varier entre 0 et $AC = 5$. $CM = 5 - x$.
   b. D'après le théorème de Thalès : $\frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB} \iff \frac{5-x}{x} = \frac{MN}{4} \iff MN = \frac{5-x}{5} \times 4 = 4 - 0{,}8x$.
2. Aire du du trapèze $ABNM$: $\mathscr{A}(x) = \frac{(MN+AB) \times AM}{2} = \frac{(8-0{,}8x)x}{2} = -0{,}4x^2 + 4x$.

Partie B

1. Le volume de la citerne est 100 m³.
2. $V(x) = 10 \times \mathscr{A}(x) = 4x(10 - x)$.
3. $V(2{,}5) = 75$ m³.
4. **a.** Tableau de valeurs :

x	1	1,4	1,5	1,6	2
$V(x) = 4x(10-x)$	35	48,16	51	53,76	64

   b. La citerne est remplie à la moitié de sa capacité lorsque $1{,}4 < x < 1{,}5$.

Exercice 63 (★☆☆ - Brevet 2009)**.** **1.** On lit $B(-4; 4{,}6)$.

2. La courbe $\mathscr{C}_3$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse -1, 2 et 4.
3. $\mathscr{C}_1$ est la représentation d'une fonction linéaire car c'est une droite passant par l'origine.
4. La fonction f est une fonction affine non linéaire donc sa représentation est une droite ne passant pas par l'origine, i.e. $\mathscr{C}_2$.
5.
$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\iff -0{,}4x + 3 = 1 \\ &\iff -0{,}4x = -2 \\ &\iff x = \tfrac{2}{0{,}4} = 5 \end{aligned}$$
   Conclusion : L'antécédent de 1 par la fonction f est 5.
6. Il suffit de calculer l'image de 4,6 par la fonction f : $f(4{,}6) = -0{,}4 \times 4{,}6 + 3 = 1{,}16$.
   Comme $f(4{,}6) = 1{,}16 \neq 1{,}2$ alors le point $A(4{,}6; 1{,}2)$ n'est pas sur la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 64 (★★☆☆). **1.** f est de la forme $f(x)=mx+p$ donc $f(2)=2m+p=4$ et $f(3)=3m+p=9$. On en déduit que $m=5$ puis que $p=-6$. $f(4)=4\times5-6=14$.

2. f est linéaire et $f(2)=4$ donc $f(x)=2x$. En particulier $f(3)=6$. Alors : $g(3)=-6$. On peut ainsi trouver que $g(x)=-10x+24$ donc $g(1)=14$.

Exercice 65 (★★☆☆).
Comme $(-h)^{17}=-h^{17}$ alors $f(h)+f(-h)=-4$ et donc $f(-h)=-4-f(h)=-4+2015=2011$.

Exercice 66 (★★☆☆). $f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=\frac{1}{4}$, $\quad f(1)=f(1+0)=f(1)f(0)$ donc $f(0)=1$.
$f(2)+f(0)+f(2)+f(1)=\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=2$.

8 Raisonnements

Exercice 67 (★★☆☆ - Triangle). Il y a 5 décompositions de 8 en somme de 3 nombres :

$$6+1+1,\quad 5+2+1,\quad 4+3+1,\quad 4+2+2,\quad 3+3+2$$

Les deux premières ne conviennent pas (un côté du triangle ne peut dépasser la somme des deux autres).
Les deux suivantes donnent des triangles aplatis ($4=3+1=2+2$).
Il n'y a donc qu'un triangle non aplati à côtés entiers dont le périmètre est 8 : celui de côtés 3, 3 et 2 .

Exercice 68 (★☆☆☆ - Le ballon de foot). $\ell=\frac{12\times5+20\times6}{2}\times4,5=405$ cm.

Exercice 69 (★☆☆☆ - Avec des petits cubes). Il y a plusieurs décomposition possibles :

$$100=1\times1\times100=1\times2\times50=1\times4\times25=1\times5\times20=1\times10\times10=2\times2\times25=2\times5\times10=4\times5\times5$$

Celle qui donne un pavé droit, plein, d'aire totale minimale est $4\times5\times5$.

Exercice 70 (★★☆☆ - Des carrés dans un rectangle).

1. Dans le rectangle de largeur 3 et de longueur 5 il y a :

- 15 carrés de côté 1 ;
- 8 carrés de côté 2 ;
- 3 carrés de côté 3.

Au total 26 carrés.

2. Dans le rectangle de largeur 3 et de longueur n il y a :

- $3n$ carrés de côté 1 ;
- $2(n-1)$ carrés de côté 2 ;
- $n-2$ carrés de côté 3.

Au total $3n+2(n-1)+n-2=6n-4$ carrés. Or $6n-4=2024 \iff 6n=2028 \iff n=338$.
Conclusion : La longueur de ce dernier rectangle est 338.

Exercice 71 (★★☆☆ - Suite de nombres). 8-1-15-10-6-3-13-12-4-5-11-14-2-7-9

Exercice 72 (★★☆☆ - Trains).

1. Dans 35 min. **2.** Dans 26 min.

Exercice 73 (★★☆☆ - Probabilités). Choisir 3 nombres parmi 4, c'est aussi en choisir 1 parmi 4 (celui qui n'est pas pris) : il y a donc 4 choix possibles. Obtenir 0 comme produit des 3 nombres choisis, c'est avoir choisi 0 parmi les 3 nombres, or il n'y a qu'une façon de ne pas avoir choisi 0 : avoir 2, 2 et 1. Il y a donc 3 possibilités d'avoir choisi 0 et la probabilité cherchée est donc $\frac{3}{4}$.

Exercice 74 (★★☆☆ - Probabilités). Comme somme des valeurs des deux dés, on peut trouver les nombres premiers 2, 3, 5, 7 et 11.

- 2 s'obtient d'une seule façon : $1+1$.
- 3 s'obtient de 2 façons : $1+2$ et $2+1$.
- 5 s'obtient de 4 façons : $1+4$, $2+3$, $3+2$ et $4+1$.
- 7 s'obtient de 6 façons : $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$ et $6+1$.
- 11 s'obtient de 2 façons : $5+6$ et $6+5$.

Cela fait, au total, $1+2+4+6+2=15$ lancers parmi les 36 lancers possibles des deux dés.
Conclusion : La probabilité que la somme soit un nombre premier est donc $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

Exercice 75 (★★★☆ - Le dé qui roule). Il faudra 3 tours pour que le dé retrouve sa position initiale.

Exercice 76 (★★★☆ - Mensonges). Comme le garçon dit la vérité deux jours de suite, il n'y a que deux possibilités :
Ou bien le premier jour était un vendredi et il s'appelle John, ou bien le dernier jour était un jeudi et il s'appelle Bob.
Dans ce dernier cas, le mardi, il aurait dit « Bob » c'est-à-dire la vérité, or il ment ce jour-là.
Il s'appelle donc John et le premier jour est un vendredi. Le septième jour est donc un jeudi et il dit la vérité : John.