

RÉPONSES

Il est important de signaler que les solutions qui vont suivre ne sont généralement pas détaillées : les hypothèses des théorèmes ne sont pas toujours citées, les calculs ne sont pas détaillés, il n'y a pas forcément de phrases, etc. L'intérêt de cette correction réside dans le fait de pouvoir vérifier les résultats trouvés mais ne doit certainement pas empêcher le lecteur de chercher et rédiger proprement ses réponses.

1 Équations et inéquations

Exercice 1 (☆☆ - Équations du 2nd degré).

- $\Delta = 100 > 0$, $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$
- $\Delta = 9 > 0$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$
- $\Delta = 61 > 0$, $x_1 = \frac{7-\sqrt{61}}{6}$ et $x_2 = \frac{7+\sqrt{61}}{6}$
- $\Delta = 0$, $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$
- $\Delta = 0$, $x = -3$
- $\Delta = -60 < 0$, donc $S = \emptyset$
- $\Delta = 2 > 0$, $x_1 = \sqrt{2}$ et $x_2 = 2\sqrt{2}$
- $x(x+4)+8=0 \iff x^2+4x+8=0$, $\Delta = -16 < 0$, donc $S = \emptyset$
- $2(1-3u) = u^2 - 3(2u+1) \iff u^2 - 5 = 0 \iff u = \sqrt{5}$ ou $u = -\sqrt{5}$

Exercice 2 (☆☆).

- $P(2) = 2^3 - 10 \times 2^2 + 31 \times 2 - 30 = 0$ donc 2 est une racine de P .
- On trouve $a = 1$, $b = -8$ et $c = 15$.
- $P(x) = 0 \iff (x-2)(x^2-8x+15) = 0 \iff x-2=0$ ou $x^2-8x+15=0$
 $\xLeftrightarrow{\Delta=4} x=2$ ou $x=3$ ou $x=5$

Exercice 3 (☆☆ - Équations quotients).

- $\frac{1}{x-2} + x + 3 = 0 \iff \frac{x^2+x-5}{x-2} = 0 \iff x^2+x-5=0$ et $x \neq 2$
 $\xLeftrightarrow{\Delta=21} x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ ou $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ et $x \neq 2$
- $\frac{3x-4}{x+1} = \frac{x-1}{2x+3} \iff \frac{5x^2+x-11}{(x+1)(2x+3)} = 0 \iff 5x^2+x-11=0$ et $x \neq -1$ et $x \neq -\frac{3}{2}$
 $\xLeftrightarrow{\Delta=221} x = \frac{-1+\sqrt{221}}{10}$ ou $x = \frac{-1-\sqrt{221}}{10}$ et $x \neq -1$ et $x \neq -\frac{3}{2}$
- $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2} \iff \frac{-x^2+7x-10}{2(x-3)(x-4)} = 0 \iff -x^2+7x-10=0$ et $x \neq 3$ et $x \neq 4$
 $\xLeftrightarrow{\Delta=9} x=2$ ou $x=5$ et $x \neq 3$ et $x \neq 4$

Exercice 4 (☆☆ - Tableau de signes).

1.

x	$-\infty$	$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	$+\infty$
Signe de $-3x^2+4x+1$	-	0	+	-

$$S =]-\infty; \frac{2-\sqrt{7}}{3}] \cup [\frac{2+\sqrt{7}}{3}; +\infty[$$

2.

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{6}$	$-2+\sqrt{6}$	$+\infty$
Signe de $2x^2+8x-4$	+	0	-	+

$$S =]-\infty; -2-\sqrt{6}] \cup [-2+\sqrt{6}; +\infty[$$

3. $2x^2 - x + 1 \leq x^2 + 3x - 4 \iff x^2 - 4x + 5 \leq 0$, $\Delta = -4 < 0$, donc $S = \emptyset$

4. $\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} < 1 \iff \frac{-x^2-x+3}{(x-1)(x+1)} < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	-1	1	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$		
Signe de $-x^2-x+3$	-	0	+	+	+	0	-	
Signe de $x-1$	-	-	-	0	+	+	+	
Signe de $x+1$	-	-	-	-	0	+	+	
Signe de $\frac{-x^2-x+3}{(x-1)(x+1)}$	-	0	+	-	-	+	0	-

$$S =]-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}] \cup]-1; 1[\cup [\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty[$$

5.

x	$-\infty$	-1	$\frac{5-\sqrt{57}}{4}$	$\frac{5+\sqrt{57}}{4}$	$+\infty$	
Signe de $x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
Signe de $2x^2 - 5x - 4$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
Signe de $\frac{x+1}{2x^2-5x-4}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	

$$S =]-\infty; -1[\cup [\frac{5-\sqrt{57}}{4}; \frac{5+\sqrt{57}}{4}[$$

Exercice 5 (☆☆ - Polynôme du 2nd degré).

1. Comme $P(1) = P(\frac{2}{3}) = 0$ alors $P(x) = \alpha(x-1)(x-\frac{2}{3})$, de plus $P(3) = 14$ donc $14 = \frac{14}{3}\alpha$ et donc $\alpha = 3$.
Conclusion : $P(x) = 3(x-1)(x-\frac{2}{3}) = (x-1)(3x-2)$.
2. Soient a, b et c trois réels distincts.
- a. Comme $P(b) = P(c) = 0$ alors $P(x) = \alpha(x-b)(x-c)$, de plus $P(a) = b$ donc $b = \alpha(a-b)(a-c)$ et donc $\alpha = \frac{b}{(a-b)(a-c)}$.
Conclusion : $P(x) = \frac{b}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)$.
- b. Par l'absurde, supposons qu'il existe un polynôme P de degré 2 tel que $P(a) = P(b) = P(c) = 1$, aussitôt le polynôme $Q(x) = P(x) - 1$ est un polynôme de degré 2 admettant 3 racines distinctes : impossible.

Exercice 6 (☆☆ - Le prof préféré). Soient x le nombre d'élèves et y la somme mise par élève, alors :

$$\begin{cases} xy = 600 \\ (x-10)(y+3) = 600 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{600}{x} \\ (x-10)(\frac{600}{x}+3) = 600 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{600}{x} \\ x^2 - 10x - 2000 = 0 \end{cases}$$

Résolution de $x^2 - 10x - 2000 = 0$, $\Delta = 8100 > 0$, $x_1 = -40 < 0$ et $x_2 = 50$.

Conclusion : 50 élèves participent au cadeau à hauteur de 12 € chacun.

Exercice 7 (☆☆ - Paramètre). 1. $\Delta_m = 17m^2 - 2m + 1$

2. $\Delta' = -64 < 0$ donc pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\Delta_m > 0$ et l'équation (E_m) admet donc toujours deux solutions réelles.
3. $P_m = -\frac{m(m-1)}{2}$
4. Pour $x = -2$, (E_m) devient $-m^2 - 5m + 6 = 0$, $\Delta = 49 > 0$, $m = -6$ ou $m = 1$.
- Si $m = -6$ alors le produit des solutions est $P_{-6} = -21$ et les deux solutions de (E_{-6}) sont -2 et $\frac{21}{2}$.
 - Si $m = 1$ alors le produit des solutions est $P_1 = 0$ et les deux solutions de (E_1) sont -2 et 0 .

2 Fonction exponentielle

Exercice 8 (☆☆).

- | | | | |
|--------------|--------------|---------------|----------------|
| 1. e^{3-x} | 3. e^x | 5. e^{2x-4} | 7. e^{-7x-4} |
| 2. e^x | 4. e^{-3x} | 6. e^x | 8. e^{4x-5} |

Exercice 9 (☆☆).

- $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2 = 4$
- $(e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}(e^{3x} - e^{-x}) = e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} + e^{-2x} = 2e^{-2x} - 2$
- $(e^x - e^{-x})(e^{2x} + e^x + 1) = e^{3x} + e^{2x} + e^x - e^x - 1 - e^{-x} = e^{3x} + e^{2x} - e^{-x} - 1$
- $(e^{3x})^2 + (e^{-3x})^2 - (e^{3x} - e^{-3x})^2 = e^{6x} + e^{-6x} - e^{6x} - e^{-6x} + 2 = 2$
- $(e^{3x})^2 - e^{2x}(e^{2x} + e^{-2x})^2 = e^{6x} - e^{2x}(e^{4x} + e^{-4x} + 2) = e^{6x} - e^{6x} - e^{-2x} - 2e^{2x} = -e^{-2x} - 2e^{2x}$

Exercice 10 (☆☆). 1. $e^{-\frac{x}{2}+1} = 1 \iff -\frac{x}{2} + 1 = 0 \iff x = 2$

- $ee^{x-1} = e^{x^2} \iff x = x^2 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1$
- $e^{3-x^2} = e \iff 3 - x^2 = 1 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$
- $e^x - e^{-x} = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0$
- On pose $X = e^x$, aussitôt :

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \iff (e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0 \iff X^2 + 2X - 3 = 0$$
$$\stackrel{\Delta=16}{\iff} X = 1 \text{ ou } X = -3 \iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = -3 < 0$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc l'unique solution est $e^x = 1 \iff x = 0$.

- $e^{2x} < e^2 \iff 2x < 2 \iff x < 1$
- $2e^{-x} - 2 \geq 0 \iff e^{-x} \geq 1 \iff -x \geq 0 \iff x \leq 0$
- $e^{x^2-5x} \geq e^{-6} \iff x^2 - 5x \geq -6 \iff x^2 - 5x + 6 \geq 0 \stackrel{\Delta=1}{\iff} x \in]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$
- $1 + e^{-2x} > 1 \iff e^{-2x} > 0 \iff x \in \mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

3 Dérivation

Exercice 11 (☆☆). On note $\mathcal{D}_f$ (resp. $\mathcal{D}'_f$) l'ensemble de définition (resp. de dérivabilité) de f .

- | | |
|--|--|
| 1. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 15x^2 - x + \frac{1}{x^2}$ | 7. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$, $f'(x) = \frac{-2x^2+10x+7}{(-2x+5)^2}$ |
| 2. $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$, $\mathcal{D}'_f =]0; +\infty[$,
$f'(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$ | 8. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 3e^x + 10x + \frac{1}{x^2}$ |
| 3. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$ | 9. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 6e^{2x+1}$ |
| 4. $\mathcal{D}_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $\mathcal{D}'_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$,
$f'(x) = \frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ | 10. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$ |
| 5. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x(x^2 - 3)$ | 11. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$ |
| 6. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{6}{x^3}$ | 12. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{(x^4+x^2+2x)e^x}{(x^2+1)^2}$ |

Exercice 12 (☆☆). Le signe de f' implique les variations de f donc $\mathcal{C}_1$ représente f et $\mathcal{C}_2$ représente f' .

Exercice 13 (☆☆). 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$.

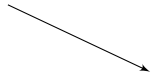
x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de f					

f admet un maximum local en $\frac{2}{3}$ valant $\frac{32}{27}$ et un minimum local en 2 valant 0 .

2. $f(x) = 0 \iff x(x^2 - 4x + 4) = 0 \iff x(x-2)^2 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2$
La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en 0 et en 2 .

Exercice 14 (☆☆ - Équation d'une tangente).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2}$.
- 2.

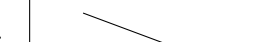
x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	-
Variations de f			

3. $f(x) = 0 \iff \frac{2x+3}{x-1} = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$ et $x \neq 1$
Le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses est $A(-\frac{3}{2}; 0)$.
De plus, $f'(-\frac{3}{2}) = -\frac{4}{5}$, donc $T_A: y = f'(-\frac{3}{2})(x + \frac{3}{2}) + f(-\frac{3}{2}) = -\frac{4}{5}x - \frac{6}{5}$.
4. Comme $f(0) = -3$ alors le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées est $B(0; -3)$.
De plus, $f'(0) = -5$, donc $T_B: y = -5x - 3$.

Exercice 15 (☆☆ - Tangentes et nombres dérivés).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x^2 + 4x - 6$.
2. $T_0: y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -6x + 1$.
3. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tels que : $f'(x) = 0 \iff 2x^2 + 4x - 6 = 0$, $\Delta = 64$, $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.
Conclusion : Les tangentes à la courbe aux points d'abscisses -3 et 1 sont horizontales.
4. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tels que : $f'(x) = 1 \iff 2x^2 + 4x - 7 = 0$, $\Delta = 72$, $x_1 = -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
Conclusion : Les tangentes à la courbe aux points d'abscisses $-1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $-1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ sont parallèles à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 16 (☆☆). 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2e^{-x} + 2 = 2(1 - e^{-x})$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

3. $T_0: y = 2 - e^{-1}$ et $T_1: y = 2(1 - e^{-1})x + 3e^{-1}$.

Exercice 17 (☆☆ - Position relative).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) \neq 0$, donc $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de tangente horizontale.
4. $f(x) - (x + 3) = \frac{2}{e^x+1} > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de la droite d .

4 Suites

Exercice 18 (☆☆).

- $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 1. $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = 1$.
 2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 0$.
 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}n$ donc $u_{100} = 50$.
- $v_n = 5 - 2n$
 1. $v_0 = 5$, $v_1 = 3$ et $v_2 = -1$.
 2. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $v_0 = 5$.
 3. $v_{100} = -195$.
- $w_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$
 1. $w_0 = 1$, $w_1 = 3$ et $w_2 = 5$.
 2. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0 = 1$.
 3. $w_{100} = 201$.
- $x_n = \frac{3^n}{n+1}$
 1. $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 3$.
 2. $x_1 - x_0 = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2} = x_2 - x_1$ donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique.
 $\frac{x_1}{x_0} = \frac{3}{2} \neq 2 = \frac{x_2}{x_1}$ donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique.
- $y_n = (\frac{1}{2})^n$
 1. $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{1}{2}$ et $y_2 = \frac{1}{4}$.
 2. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $y_0 = 1$.
 3. $y_{100} = \frac{1}{2^{100}}$.

- Exercice 19** (☆☆ - Suites arithmétiques). 1. $u_{10} = u_0 + 10r = \frac{79}{6}$ et $u_{20} = u_0 + 20r = \frac{149}{6}$.
2. $r = u_1 - u_0 = 3$ donc $u_2 = 8$, $u_5 = 17$ et $S_{10} = (n+1) \times \frac{u_0+u_{10}}{2} = 11 \times \frac{2+79}{2} = 187$.
3. $5r = u_{10} - u_5 = -10$ donc $r = -2$. $u_0 = 17$, $u_1 = 15$ et $S_{20} = 21 \times \frac{17-23}{2} = -63$.

- Exercice 20** (☆☆ - Suites géométriques). 1. $u_1 = \frac{7}{3}$, $u_2 = \frac{7}{9}$ et $u_3 = \frac{7}{27}$.
2. $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{2}$ donc $u_2 = \frac{9}{2}$, $u_5 = u_0 \times q^5 = \frac{3^5}{2^4}$ et $S_7 = u_0 \times \frac{1-q^8}{1-q} = \frac{6305}{64}$.
3. $u_2 = u_0 \times q^2$ donc $q = \sqrt{\frac{u_2}{u_0}} = \frac{1}{2}$. $u_1 = 6$, $u_5 = \frac{3}{8}$ et $S_9 = u_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = \frac{3069}{128}$.

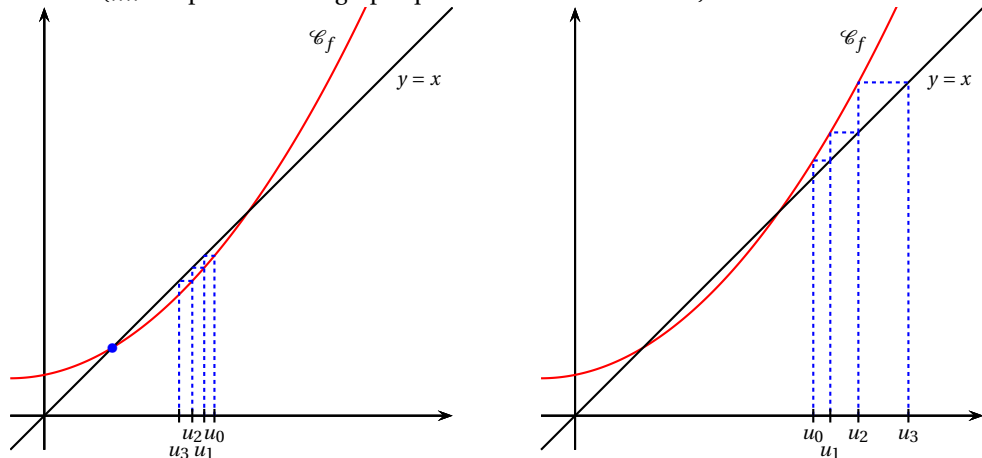
Exercice 21 (☆☆ - Sens de variation).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0$.
Conclusion : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{2n^2}{3^n} > 0$ donc on peut étudier le sens de variation via le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{2n^2}{3^n}} = \frac{2(n+1)^2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2n^2} = \frac{2^{2n+1}}{3} \times \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} > 1$$

Conclusion : La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Exercice 22 (☆☆ - Représentation graphique d'une suite récurrente).

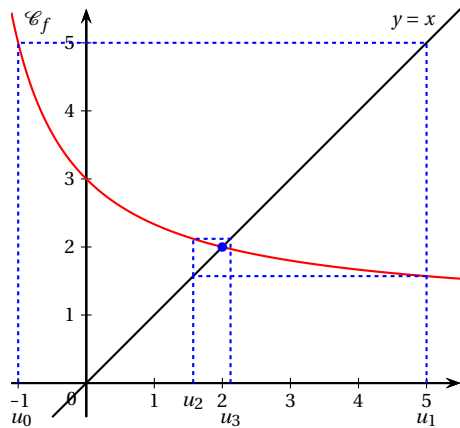


Exercice 23 (☆☆ - Suite arithmético-géométrique).

- $u_1 = 3$ et $u_2 = \frac{7}{3}$.
 $u_1 - u_0 = -1 \neq -\frac{2}{3} = u_2 - u_1$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique.
 $\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{4} \neq \frac{7}{9} = \frac{u_2}{u_1}$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 1) = \frac{2}{3}v_n$.
La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 3$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times (\frac{2}{3})^n$ donc $u_n = 3 \times (\frac{2}{3})^n + 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 3 \times \frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 9(1 - (\frac{2}{3})^{n+1})$, $S'_n = S_n + (n+1) = 9(1 - (\frac{2}{3})^{n+1}) + n + 1$.

Exercice 24 (☆☆ - Suite homographique).

1.



- $u_1 = 5$ et $u_2 = \frac{11}{7}$.
 $u_1 - u_0 = 6 \neq -\frac{24}{7} = u_2 - u_1$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique.
 $\frac{u_1}{u_0} = -5 \neq \frac{11}{35} = \frac{u_2}{u_1}$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} - 2}{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} + 3} = \frac{\frac{u_n + 6 - 2u_n - 4}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 6 + 3u_n + 6}{u_n + 2}} = \frac{-u_n + 2}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{4u_n + 12} = \frac{-u_n + 2}{4u_n + 12}$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 3} = -\frac{1}{4}v_n$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{3}{2}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{3}{2} \times (-\frac{1}{4})^n$.

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$ car pour $n = 0$, $v_0 = -\frac{3}{2}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{4} \leq (-\frac{1}{4})^n \leq \frac{1}{4}$ donc $-\frac{3}{8} \leq v_n \leq \frac{3}{8}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3} \iff v_n(u_n + 3) = u_n - 2 \iff v_n u_n + 3v_n = u_n - 2$$

$$\iff u_n(v_n - 1) = -3v_n - 2 \iff_{v_n \neq 1} u_n = \frac{-3v_n - 2}{v_n - 1}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\frac{9}{2} \times (-\frac{1}{4})^n - 2}{-\frac{3}{2} \times (-\frac{1}{4})^n - 1}$.

Exercice 25 (☆☆). 1. $d_1 = \sqrt{3}$ et $d_2 = \sqrt{8}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (d_{n+1})^2 - (n+1)^2 = (d_n)^2 + 2n + 3 - n^2 - 2n - 1 = (d_n)^2 - n^2 + 2 = u_n + 2$.
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n$ donc $(d_n)^2 = 2n + n^2 \iff_{d_1 = \sqrt{3} > 0} d_n = \sqrt{n^2 + 2n}$.

Exercice 26 (☆☆ - Bac S - Centres étrangers - juin 2013).

1.

```
1 n = 1
2 u = 1.5
3 while n < 9 :
4     u = (n*u+1)/(2*(n+1))
5     n = n+1
6 print(u)
```

2.

```
1 n = 1
2 u = 1.5
3 while n < 9 :
4     u = (n*u+1)/(2*(n+1))
5     n = n+1
6 print(u)
```

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ semble décroissante et converger vers 0.

Exercice 27 (☆☆ - Bourses d'excellence).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2u_n - 40n$.
- La fondation dispose d'un budget total de 4 000 euros, on complète le tableau :

u	100	160	240	360	520	740	1 040	1 440
S	100	260	500	860	1 380	2 120	3 160	4 600
n	1	2	3	4	5	6	7	8

Le résultat affiché est donc $n = 7$.

3. Cela signifie qu'avec 4 000 euros, la fondation pourra attribuer des bourses à 7 étudiants.

5 Probabilités

Exercice 28 (☆☆). $\mathbb{P}(\overline{R}) = \frac{13}{15}$, $\mathbb{P}(\overline{F}) = \frac{23}{45}$, $\mathbb{P}(\overline{R} \cap \overline{F}) = \frac{13}{30}$ et $\mathbb{P}(R \cup F) = \frac{17}{30}$.

Exercice 29 (☆☆). 1. $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{7}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{7}$.

2. $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{3}{5}$.

Exercice 30 (☆☆). 1. $\mathbb{P}(E) = 0,6$, $\mathbb{P}(T) = 0,78$ et $\mathbb{P}_E(T) = 0,7$.

2. On en déduit :

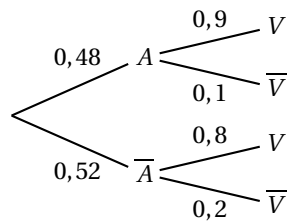
	E	$\overline{E}$	Total
T	126	108	234
$\overline{T}$	54	12	66
Total	180	120	300

3. $\mathbb{P}_E(\overline{T}) = \frac{54}{180} = 0,3$.

4. $\mathbb{P}_{\overline{E}}(T) = \frac{12}{120} = 0,1$.

Exercice 31 (☆☆ - Intention de vote).

1.



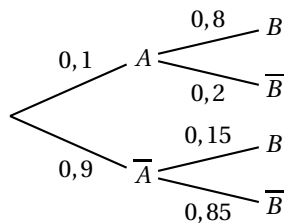
2. a. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}(A \cap V) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap V) \\ &= 0,48 \times 0,9 + 0,52 \times 0,8 = 0,848\end{aligned}$$

b. $\mathbb{P}_V(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{0,432}{0,848} \approx 0,509$.

3. $\mathbb{P}(\text{« vote A »}) = \mathbb{P}(A \cap V) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{V}) = 0,48 \times 0,9 + 0,52 \times 0,2 = 0,536$.

Exercice 32 (☆☆ - Indépendance).



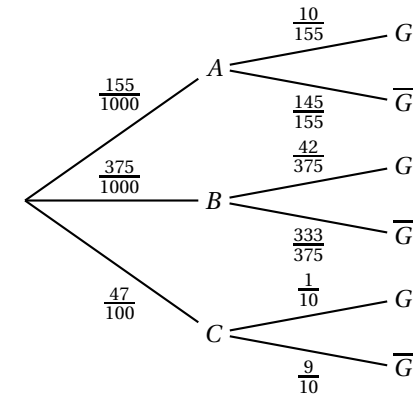
D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,15 = 0,215$$

De plus, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,08 \neq 0,0215 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 33 (☆☆).

1.



2. $\mathbb{P}_A(G) = \frac{2}{31} \approx 0,0645$, $\mathbb{P}_B(G) = \frac{14}{125} = 0,112$ et $\mathbb{P}_C(G) = \frac{47}{470} = 0,1$.
Il est donc plus probable d'acheter un ticket gagnant entre 10 h et 14 h.

3. $\mathbb{P}(A \cap G) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(G) = \frac{155}{1000} \times \frac{10}{155} = 0,01$.

4. $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(G) = \frac{155}{1000} \times \frac{10+42+47}{1000} = 0,015345 \neq 0,01 = \mathbb{P}(A \cap G)$.

Conclusion : Les événements A et G ne sont donc pas indépendants.

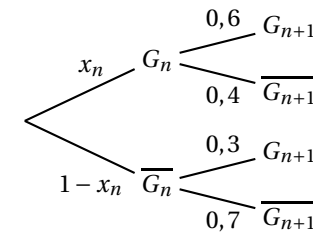
5. $\mathbb{P}_G(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{0,01}{0,099} \approx 0,101$.

Exercice 34 (☆☆). 1. $\mathbb{P}(G_1) = 0,5$, $\mathbb{P}(\overline{G}_1) = 0,5$, $\mathbb{P}_{G_1}(G_2) = 0,6$ et $\mathbb{P}_{\overline{G}_1}(G_2) = 0,3$.

2. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(G_1 \cap G_2) + \mathbb{P}(\overline{G}_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}_{G_1}(G_2) + \mathbb{P}(\overline{G}_1) \times \mathbb{P}_{\overline{G}_1}(G_2) = 0,45$$

3.



4. D'après la formule des probabilités totales :

$$x_{n+1} = \mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{G}_n \cap G_{n+1}) = x_n \times 0,6 + (1 - x_n) \times 0,3 = 0,3x_n + 0,3$$

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{n+1} = x_{n+1} - \frac{3}{7} = 0,3x_n + 0,3 - \frac{3}{7} = 0,3(x_n - \frac{3}{7}) = 0,3y_n$.

La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $y_1 = \frac{1}{14}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{14} \times 0,3^{n-1}$.

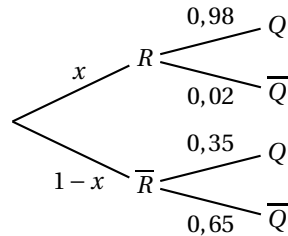
b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = y_n + \frac{3}{7} = \frac{1}{14} \times 0,3^{n-1} + \frac{3}{7}$.

c. $x_5 \simeq 0,43019$, $x_7 \simeq 0,42869$ et $x_{10} \simeq 0,42858$.

On peut conjecturer que la probabilité de gagner, après un grand nombre de parties, tend vers $\frac{3}{7} \simeq 0,42857$.

Exercice 35 (☆☆ - Bac - Métropole sujet 2 - juin 2024). 1. $\mathbb{P}(Q) = 0,917$ et $\mathbb{P}_{\overline{R}}(\overline{Q}) = 0,65$.

2. a.



b. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Q) &= \mathbb{P}(R \cap Q) + \mathbb{P}(\overline{R} \cap Q) \iff 0,917 = 0,98x + 0,35(1-x) \\ &\iff 0,63x = 0,567 \iff x = 0,9\end{aligned}$$

3. $\mathbb{P}_Q(R) = \frac{\mathbb{P}(R \cap Q)}{\mathbb{P}(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} \simeq 0,961$.

Exercice 36 (☆☆ - Loi de probabilité). 1. $b = 0,1$.

2. $\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 0,25 + 0,1 = 0,35$.

3. $\mathbb{E}(X) = 1,1$, $V(X) = 0,99$ et $\sigma(X) = \sqrt{0,99} \simeq 0,995$.

Exercice 37 (☆☆ - Temps de trajet). 1. $\mathbb{E}(X) = 1,7$ et $V(X) = 0,81$.

2. a. $T = 15 + 2X$.

b. $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(15 + 2X) = 15 + 2\mathbb{E}(X) = 18,4$ et $V(T) = V(15 + 2X) = 4V(X) = 3,24$.

6 Trigonométrie

Exercice 38 (☆☆).

Angle en degré	0	30	45	60	90	180	270	360
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Exercice 39 (☆☆ - Conversion).

1. $70^\circ = \frac{7\pi}{18}$, $145^\circ = \frac{29\pi}{36}$, $180^\circ = \pi$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$

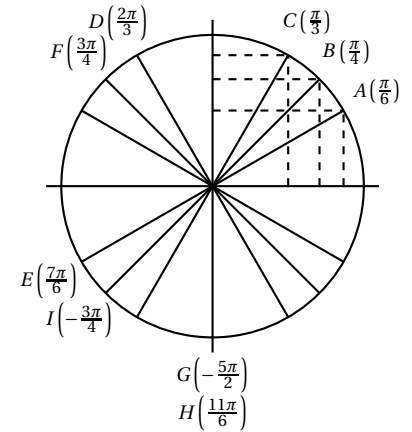
2. $\frac{7\pi}{6} = 210^\circ$, $\frac{5\pi}{12} = 75^\circ$, $\frac{4\pi}{5} = 144^\circ$, $\frac{17\pi}{12} = 255^\circ$, $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

Exercice 40 (☆☆).

$$\begin{array}{llllll}\alpha = \frac{\pi}{2} & \gamma = \frac{\pi}{2} & \varepsilon = -\frac{3\pi}{4} & \theta = \frac{\pi}{2} & \nu = \frac{\pi}{6} & \psi = -\frac{\pi}{4} \\ \beta = -\frac{\pi}{3} & \delta = \frac{3\pi}{4} & \zeta = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} & \mu = \frac{2\pi}{3} & \phi = \frac{\pi}{4} & \omega = \frac{\pi}{2}\end{array}$$

Exercice 41 (☆☆ - Position sur le cercle trigonométrique).

- Pour A : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- Pour B : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Pour C : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Pour D : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Pour E : $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
- Pour F : $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Pour G : $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -1$
- Pour H : $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
- Pour I : $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



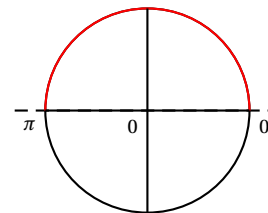
Exercice 42 (☆☆ - Équations trigonométriques). Ensemble des solutions dans $[0; 2\pi[$:

- $S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$
- $S = \{\pi\}$
- $S = \left\{\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$
- $S = \left\{\pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$
- $S = \left\{\frac{2\pi}{5}; \frac{8\pi}{5}\right\}$
- $S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{5\pi}{3}\right\}$

Exercice 43 (☆☆ - Inéquations trigonométriques).

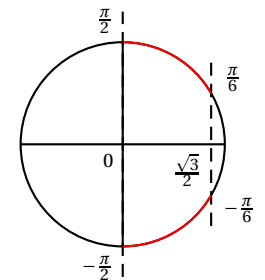
1. $\sin(x) > 0$ sur $[0; 2\pi[$:

$$S =]0; \pi[$$



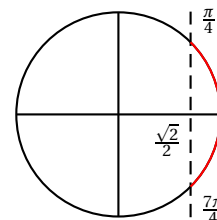
3. $0 \leq \cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $]-\pi; \pi]$:

$$S = \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$$



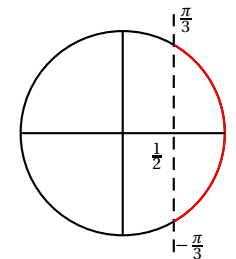
2. $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; 2\pi[$:

$$S = \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right[$$



4. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ sur $]-\pi; \pi]$:

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \text{ donc } S = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$$



Exercice 44 (★★).

1. $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = \frac{4}{9}$ donc $\cos(x) = \frac{2}{3}$ ou $\cos(x) = -\frac{2}{3}$.
Or, $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(x) \geq 0$ et ainsi $\cos(x) = \frac{2}{3}$.
2. $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = \frac{47}{49}$ donc $\sin(x) = \frac{\sqrt{47}}{7}$ ou $\sin(x) = -\frac{\sqrt{47}}{7}$.
Or, $x \in [\frac{\pi}{4}; \pi]$, donc $\sin(x) \geq 0$ et ainsi $\sin(x) = \frac{\sqrt{47}}{7}$.
3. Soit $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$,

$$\begin{aligned} 2\cos^2(x) + \sin(x) = 1 &\iff 2(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) = 1 \iff -2\sin^2(x) + \sin(x) + 1 = 0 \\ &\stackrel{X=\sin(x)}{\iff} -2X^2 + X + 1 = 0 \stackrel{\Delta=9}{\iff} X = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad X = 1 \\ &\iff \sin(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(x) = 1 \end{aligned}$$

Or, $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, donc $\sin(x) \geq 0$, i.e. $\sin(x) = 1$ et ainsi $x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 45 (★★).

- $\mathcal{C}_1$ représente $b : x \mapsto \sin(x)$
- $\mathcal{C}_2$ représente $c : x \mapsto \sin(2x)$
- $\mathcal{C}_3$ représente $d : x \mapsto \cos(2x)$
- $\mathcal{C}_4$ représente $a : x \mapsto \cos(\frac{x}{2})$

7 Produit scalaire

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 46 (★★). 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 35$.

2. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH \iff 35 = 7AH \iff AH = 5$.
3. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \iff 35 = 7\sqrt{41} \cos(\widehat{BAC}) \iff \cos(\widehat{BAC}) = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

Conclusion : $\widehat{BAC} \simeq 38,7^\circ$.

Exercice 47 (★★ - Produits scalaires).

1. a. $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = AB \times AB = 8 \times 8 = 64$ c. $\vec{AB} \cdot \vec{DB} = AB \times AB = 8 \times 8 = 64$
b. $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = AB \times DC = 8 \times 8 = 64$ d. $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$
2. $\vec{BC} \cdot \vec{BE} = BI \times BC = 4 \times 8 = 32$ et $\vec{CE} \cdot \vec{BC} = -CI \times BC = -4 \times 8 = 32$.
3. a. $\vec{AB} \cdot \vec{BE} = AB \times IE = 8 \times 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$
b. $\vec{CE} \cdot \vec{CD} = -IE \times CD = -4\sqrt{3} \times 8 = -32\sqrt{3}$
c. $\vec{BA} \cdot \vec{IE} = -BA \times IE = -8 \times 4\sqrt{3} = -32\sqrt{3}$

Exercice 48 (★★).

1. D'après le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles BAI et BJC : $BI = BJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.
2. $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = BI \times BJ \times \cos(\widehat{IBJ}) = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \cos(\alpha) = \frac{5}{4}a^2 \cos(\alpha)$
3. $\vec{BI} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$ et $\vec{BJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}$.

4. $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = \left(-\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}\right) = \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AB} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \frac{1}{4}\vec{AD} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} \cdot \vec{AD}$
 $= \frac{1}{2}AB^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}AD^2 = a^2$
On en déduit que $\frac{5}{4}a^2 \cos(\alpha) = a^2$ et ainsi $\alpha = \arccos(\frac{4}{5}) \simeq 37^\circ$.

Exercice 49 (★★ - Droites perpendiculaires).

1. Un vecteur normal à la droite d est $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Comme d' est perpendiculaire à d alors $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite d' donc d' admet une équation de la forme $-x + 3y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
De plus, $B \in d'$ donc $-2 + 3 \times (-3) + c = 0 \iff c = 11$ et donc $d' : -x + 3y + 11 = 0$.
3. Le point H appartient à la droite d ainsi qu'à la droite d' , on résout donc le système :

$$\begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ -x + 3y + 11 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10y + 29 = 0 \\ x = 3y + 11 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{29}{10} \\ x = \frac{23}{10} \end{cases}$$

Conclusion : $H(\frac{23}{10}; -\frac{29}{10})$.

Exercice 50 (★★).

1. $\vec{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la hauteur issue de A dans le triangle ABC , cette droite admet donc une équation de la forme $5x - 4y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
De plus, A appartient à cette droite donc : $5 \times 1 - 4 \times (-3) + c = 0 \iff c = -17$.
Conclusion : Une équation de la hauteur issue de A est $5x - 4y - 17 = 0$.
2. $\vec{BC}$ est un vecteur directeur de la droite (BC) donc (BC) admet une équation de la forme $4x + 5y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
De plus, $C \in (BC)$ donc $4 \times 3 + c = 0 \iff c = -12$ et donc $(BC) : 4x + 5y - 12 = 0$.
Le point H appartient aux deux droites précédentes, on résout donc le système :

$$\begin{cases} 5x - 4y - 17 = 0 \\ 4x + 5y - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 41x - 133 = 0 \\ 4x + 5y - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{133}{41} \\ y = -\frac{8}{41} \end{cases}$$

Conclusion : $H(\frac{133}{41}; -\frac{8}{41})$.

3. $AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \frac{23}{\sqrt{41}} \simeq 3,59$ u.l.
4. $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{23}{2} = 11,5$ u.v.

Exercice 51 (★★ - Équation de cercle).

1. $x^2 - 3x + y^2 + y - 2 = 0 \iff (x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{2}$
Conclusion : E est un cercle de centre $\Omega(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{2}}$.
2. $\Omega G = \frac{\sqrt{10}}{2} \neq \frac{3}{\sqrt{2}}$ donc $G \notin E$.
 $\Omega N = \frac{3}{\sqrt{2}}$ donc $N \in E$.

Exercice 52 (★★ - Intersection cercle/droite).

1. $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc d admet une équation de la forme $3x + y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
De plus, le milieu $M(4;2)$ de $[CD]$ appartient à d donc : $3 \times 4 + 2 + c = 0 \iff c = -14$.
Conclusion : $d : 3x + y - 14 = 0$.
2. Le centre Ω de $\mathcal{C}$ est le milieu de $[AB]$ et a pour coordonnées $(3; \frac{5}{2})$.
De plus, le rayon au carré de $\mathcal{C}$ vaut $\Omega A^2 = \frac{25}{4}$ donc $\mathcal{C}$ a pour équation : $(x-3)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$.
3. On résout le système :

$$\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ x^2 - 6x + y^2 - 5y + 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x + 14 \\ 10x^2 - 75x + 135 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -3x + 14 \\ x = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Conclusion : Il y a deux points d'intersection qui ont pour coordonnées $(3;5)$ et $(\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$.

Exercice 53 (★★ - Repérage dans l'espace).

1. $F(1;0)$, $K(2;1)$, $G(1;1)$ et $O(0;2)$.
2.

$A(0;0;1)$	$E(0;0;0)$	$I(2;0;1)$	$M(1;2;1)$
$B(1;0;1)$	$F(1;0;0)$	$J(2;1;1)$	$N(0;2;1)$
$C(1;1;1)$	$G(1;1;0)$	$K(2;1;0)$	$O(0;2;0)$
$D(0;1;1)$	$H(0;1;0)$	$L(2;0;0)$	$P(1;2;0)$
3. $Q(1; \frac{1}{2}; 1)$ et $R(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0)$.
4. $\overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc le point S a pour coordonnées $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4})$.
 $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc le point T a pour coordonnées $(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.